

Kuyruk Teorisi Ders Notları:

Bazı Kuyruk Modelleri

Mehmet YILMAZ

mehmetyilmaz@ankara.edu.tr

10 KASIM 2017



1. HAFTA

1 Kuyruk Teorisi: Giriş

Bir hizmete olan talep arttıkça talebi karşılamak için hizmeti veren birimler arzın seviyesini yükseltmek için kararlar alırlar. Diğer taraftan, birimler hizmeti alabilmek için sırada beklemeye başlarlar. Eğer uzun süre bekleme olacaksa bazen sistemden hizmet almadan çıkışlar da olabilir. Bu nedenle, belirli bir işin yapılması için hizmet sunacak olan bir sistemde hizmet veren kanalların sayısının ve hizmet sürelerinin hızının iyi planlanmasının yanı sıra, hizmeti alabilmek için sıra bekleyen birimlerin de uzun süre beklemesinin ve uzun kuyruklar oluşmasının önlenmesi gerekmektedir. Hizmet sisteminde bir diğer önemli nokta ise, hizmet kanallarının boşa bekleme süreleridir. Beklenilenden fazla süre boşa bekleyen kanal ya da kanallar gereksiz maliyete neden olabilir. Bu durumda, kuyruk modelinin iyi planlanması üç duruma dayanmaktadır; birimlerin bekleme süreleri, fazla bekleme veya hizmet kapasitesinin sınırlı olması nedeni ile birimlerin hizmet alamaması ve hizmet kanallarının boşa bekleme süreleridir.

- Marketlerde kasa önlerindeki sıra bekleme
- Bankacılık işlemleri için gişelerde sıra bekleme
- Muayene olabilmek için sıra bekleme
- Hava limanlarında uçakların iniş-kalkış yapmaları
- Endüstriyel bir üretimde üretimin aşamaları
- Trafik ışıklarında bekleme

gibi örnekler için birer kuyruk modeli tanımlamak mümkündür. Kuyruk modelini ta-

nımlayabilmek için bileşenlerinin ve işleyişinin hakkında kısaca bilgi verilecektir:

1.1 Kuyruk modelinin bileşenleri

1.1.1 Girdi Süreci

Hizmet isteminde bulunan birimlerin gelişinin nasıl olacağını belirtir. Modelin girdi sürecinin belirlenebilmesi için birimlerin geliş koşullarının belirlenmesi gerekir.

- a-) Birimlerin sisteme geliş kaynağı bir veya daha fazla olabilir. Örneğin, bankacılık işlemleri için banka şubesine gelen müşteriler arasında hem para çekmeye gelenler hem de fatura yatırmak isteyenler olabilir.
- b-) Birimlerin kaynağı sonlu ya da sonsuz olabilir. Örneğin, bir barajı besleyen suların kaynağının sonsuz olabileceği düşünülürken, bir taş ocağındaki kaya kırma makinelerinin ise sonlu kaynağa sahip olduğu düşünülebilir.
- c-) Sisteme birer birer veya gruplar halinde gelişler olabilir. Örneğin, egsoz emisyon ölçümü için araçlar birer birer giriş yaparken, tur otobüsü ile bir otele gelen turistler topluca giriş yaparlar.
- d-) Sisteme gelişler kuyruk sistemi tarafından tamamen veya kısmen kontrol edilebilir. Örneğin, gelen-yolcu için hava limanı girişlerindeki kontrol noktalarından birer birer geçişine izin verilir. Diğer yandan, bir büfeye ihtiyaçlarını almak için gelen kişiler ilk gelen ilk hizmet alır düşüncesi ile bir sıra oluşturabilirler.
- e-) Gelişler önceden belirli (deterministik), ya da rastgele (olasılık kanununa sahip) olabilir. Örneğin, merkezi sınava girecek adayların sınav binası önünde beklemeleri ve sonrasında kendi giriş kartlarında yazılan sınav salonuna ve oturma düzenine göre yerleşmeleri kuralları önceden belirli olan bir düzenektir. Öte yandan, milli

piyango satışı yapan bir biletçinin önünde bilet almak için sıra bekleyenler rastgele düzende olabilir.

- f-) Gelişler rastgele ile ise geliş sıklığı, belirli zaman aralıklarında geliş sayıları için deneysel veya teorik dağılım tanımlanabilir. Sayma süreçlerinde yaygın olarak kullanılan Poisson dağılımı bu dağılımlardan birisidir.
- g-) Gelişler birbirlerine bağımlı ya da bağımsız olabilir. Bir kaza anında yaralanmış olanların tedavisi için acil servise yapılan girişler bağımlıdır. Çünkü aynı ortak maruz kaldıkları bir durum vardır. Sonra gelenlerin sıra bekleme durumunu değiştirecektir. Öte yandan, Kızılay'da seyyar simit satan bir simitçiye gelenlerin rastgele olduğu düşünülebilir. Belki aynı otobüsten veya metrodan inmiş olsalar bile simit tercihleri hastane örneğindeki gibi zorunlu bir geliş değildir.
- h-) Gelişler belirli zaman aralıklarında gözleendiğinde ortalama olarak sabit olabilir veya olmayabilir. Ortalama geliş oranı, standart sapması, ya da dağılımı zaman için de değişmemektedir. Bu durumu durağanlık olarak adlandırabiliriz. Bu durumlarda modelleme işi biraz daha kolay olmaktadır.

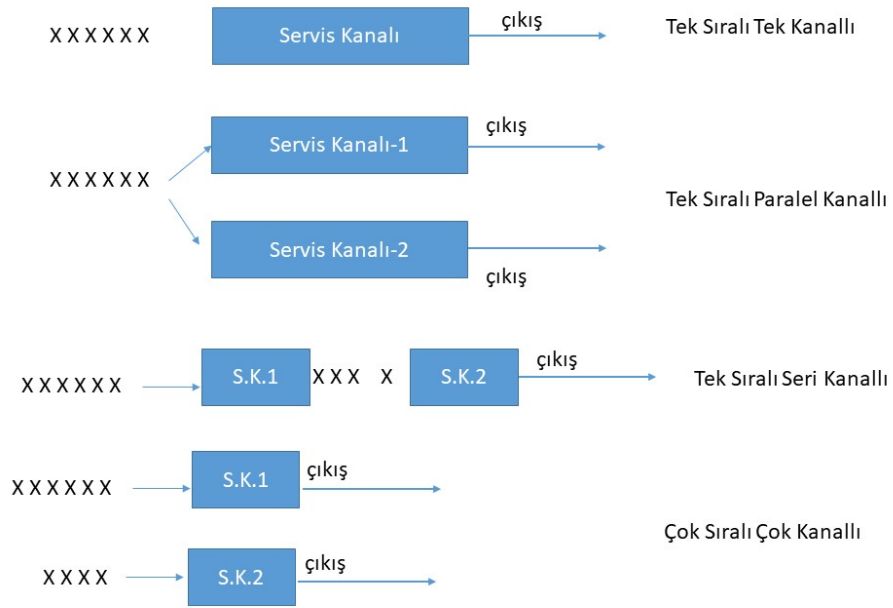
Sistemin girdi sürecinin belirlenebilmesi için gelişler arasındaki zaman aralıklarının belirlenmesi ve geliş kaynağının bilinmesi gerekir. Gelişler arası sürenin dağılımı sistemden sisteme ya da sistemin çalıştığı süre zarfı içerisinde belirli zaman aralıklarında değişim gösterebilir. Örneğin bir lokantaya gelen müşterilerin sayıları öğle saatlerinde daha fazladır, diğer zaman aralıklarında ise daha azdır.

1.1.2 Servis Mekanizması

Hizmeti alabilmek için sisteme giriş yapan birimlere hizmetin nasıl verileceğini belirtir. Hizmet sunulan noktaların, aynı anda hizmet verilecek olan birim sayısının, servis sürele-

rinin hızının, belirli bir zaman aralığında hizmet verilecek olan ortalama birim sayısının belirlenmesi gerekir.

Birimlere hizmetin sunulduğu yerlere servis kanalı denilir. Sadece bir kanalın bulunduğu sistemler "tek kanallı" birden fazla kanal aracılığı ile hizmet sunan sistemler "çok kanallı", aynı anda aynı hizmeti sunan sistemler "paralel kanallı", farklı farklı hizmetler sunarak birbirlerini tamamlayan kanallı sistemler ise "seri kanallı" olarak adlandırılırlar.



1.1.3 Sıra Bekleme

Hizmet için sisteme giriş yapan birimlerin hızı, hizmet verme hızından daha büyük ise bir sıra ya da kuyruk oluşur. Oluşan kuyruklar servis kanallarının düzenine ve sistemin kapasitesine göre değişiklik gösterir.

Eğer servis tek kanallı ise tek sıralı-tek kanallı bir kuyruk düzeni oluşacaktır. Öte yandan, seri kanallı sistemde oluşacak bir kuyruğun uzunluğu ve kuyrukta bekleme zamanı, sistemin trafik yoğunluğuna bağlıdır. Trafik yoğunluğu, birim zamanda birimlerin sisteme hizmet almak için geliş yapma hızının bir hizmet kanalının birim zamanda hizmet verebildiği birim sayısı olan servis hızına oranıdır. Bu oranın 1' den büyük çıkması, sonsuz kapasiteli bir sistemde oluşacak kuyruğun sınırsız biçimde uzayacağını belirtir. Ancak gittikçe uzayan bir kuyruğa yeni gelen bir birim girmek istemeyebilir veya kuyrukta bulunan bir birim sırayı terk edebilir. Bunun yanı sıra, sistemde servis kanallarının arızası nedeni ile hizmet sunulamayacağı veya belirli sayıda birimden sonrasına hizmet sunulamayacağı bildirilebilir.

1.1.4 Servis Disiplini

Birimlerin hizmet kanalına veya kanallarına hangi kurallara göre alınacağını bildirir. Bu disiplinlerden bazıları aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

- **FIFO (First In First Out):** İlk gelen birime öncelikli olarak hizmet verilir.
 - Hava limanındaki bir taksi durağında sıra bekleyen müşteriler sırası ile ilk gelenden başlanarak hizmet alırlar.
- **SIRO (Serve In Random Order):** Birimlere rastgele olarak hizmet verilir.
 - Üretim birimlerinde ürünler banttan rastgele seçilerek kalite kontrol için nu-

mune oluşturulur.

- **LIFO (Last In First Out):** Son gelen birim ilk olarak hizmet alır ve sistemden ayrılır.
 - Evden-Eve nakliyat şirketlerindeki nakliye kamyonları göz önüne alınırsa, ilk yüklenen eşya varış noktasında en son kamyonun indirilirler.
- **GD (General Discipline):** Genel disiplini belirtir. Örneğin, sisteme VIP (Very Important Person) birimler önem sırasına göre hizmet için alınabilir.
 - Hastanelerde öncelikle acil vakalara bakılması

NOT

Servis disiplinin farklılığı, bekleme zamanlarının dağılımını değiştirebilir.

1.2 Kuyruk Modellerinin Sınıflandırılması

Sisteme Geliş-ayrılış dağılımları ve paralel servis kanalları sayısına göre, Kendall (1953) ve Lee (1966) bu üç disipline (girdi, servis, sıra bekleme) FIFO, SIRO ve LIFO gibi servis disiplinini ve bulunabilecek maksimum birim sayısını, hizmet alacak birimlerin kaynağını da tanımlayarak 6 karakteristiği belirlemişlerdir. Kuyruk modelini tanımlayan bu form aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\underbrace{(A/B/C)}_{\text{Girdi}} : \underbrace{(D/E/F)}_{\text{Çıktı}}$$

Burada,

- A → Gelişlerin yada gelişler arası sürenin dağılımını
- B → Servis süresinin dağılımını
- C → Servisteki hizmet kanalı sayısını

- $D \rightarrow$ Servis disiplinini (FIFO, LIFO, SIRO, GD gibi)
- $E \rightarrow$ Sisteme alınabilecek maksimum müşteri sayısını (bu değer sonsuz ise genellikle ifade edilmemektedir)
- $F \rightarrow$ Hizmet alacak birimlerin kaynağını (sonlu veya sonsuz, bu değer de kaynak sonsuz iken ifade edilmemektedir)

belirtmektedir. Şimdi A ve B notasyonları yerine gelebilecek dağılımları sıralayalım:

M- Markovumsu, gelişlerin veya çıkışların sayıları Poisson dağılımına uyar. Gelişler arası süre veya hizmet süreleri üstel dağılımlıdır. Bu nedenle, kimi zaman "M" "Memoryless" hafızasız dağılım anlamına da gelmektedir.

E_k - Gelişler arası sürenin veya hizmet sürelerinin Erlang dağılımlı olduğu anlamına gelmektedir (Gamma dağılımının şekil parametresi tamsayı olduğu durumda Erlang dağılımı olarak bilinir).

D- Gelişler arası sürenin veya hizmet sürelerinin Dejenere bir dağılıma sahip olduğu veya deterministik olduğu anlamına gelmektedir.

G- Gelişler arası sürenin veya hizmet sürelerinin genel veya keyfi bir dağılıma sahip olduğunu belirtmektedir.

Servisteki kanal sayısını gösteren C karakteristiğinin yerine 1,2,3 gibi kanal sayısını nitelik bakımından belirli edecek biçimde sayılar gelmektedir.

Örnek Kuyruk Modeli Gösterimleri

$M/E_k/3 : FIFO/40/\infty$ Gelişler arası sürenin üstel dağılımlı, hizmet sürelerinin k şekil parametrelili Erlang dağılımlı, hizmet kanalı sayısının 3, servis disiplinin "ilk giren ilk çıkar" şeklinde olduğu, servis kapasitesinin 40 birim ile sınırlı olduğu, birimlerin kaynağının ise sonsuz olduğu bir kuyruk modelini tanımlamaktadır.

$E_1/E_k/1$: SIRO/ ∞/∞ Gelişler arası sürenin üstel dağılımlı, hizmet sürelerinin k şekil parametrelili Erlang dağılımlı, sadece bir hizmet kanalı olduğu, servis disiplininin "rastgele sırada" olduğu, servis kapasitesinin sınırsız ve birimlerin kaynağının ise sonsuz olduğu bir kuyruk modelini tanımlamaktadır.

$D/M/2$ Gelişler arası sürenin sabit bilinen bir sayı olduğu, hizmet sürelerinin üstel dağılımlı, iki hizmet kanalı olduğu bir kuyruk modelini tanımlamaktadır.

$M/G/2/10$ Gelişler arası sürenin üstel dağılımlı, hizmet sürelerinin ise keyfi dağılımlı olduğu iki hizmet kanallı ve 10 birime kadar kapasitesi olan bir kuyruk modelini tanımlamaktadır.

1.3 Kuyruk Sistemlerinde Geçiş Devresi ve Kararlı Durum

İşleyen bir kuyruk sisteminin karaktersitikleri zamana bağlı olarak değişim gösteriyorsa sistem geçiş durumundadır. Bu durumla çoğunlukla sistemin işlemeye başladığı ilk zamanlarda karşılaşılır. Sistemin davranışı zamana bağlı değil ise kararlı durumdadır. Kararlı duruma geçiş, sistemin epeyce bir süre tecrübe edilmesine bağlıdır.