Kuyruk Teorisi Ders Notları:

Bazı Kuyruk Modelleri

Mehmet YILMAZ

mehmetyilmaz@ankara.edu.tr

10 KASIM 2017

2. HAFTA

Kuyruk modelinin teorik kurgusunda faydalanabileceğimiz süreçler ve ilgili dağılımlar aşağıdaki alt başlıklar şeklinde verilecektir:

1.4 Sayma Süreci

Tanım. (Sayma Süreci) $\{N_t\}_{t\geq 0}$ $[0,t)$ aralığında belirli bir tür olayın gerçekleşme sayısı olmak üzere, durum uzayı kesikli bir stokastik süreçtir. Bu süreç aşağıdaki özellikleri sağlar.

(Ö1) $\forall t \geq 0$ için $N_t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $N_0 = 0$ dır.

(Ö2) $\forall s \leq t$ için $N_s \leq N_t$ dir (monotonluk özelliği)

(Ö3) $s < t$ için $N_t - N_s$ farkı $(s,t]$ aralığında gerçekleşen olay sayısını gösterir.

X_1 rastgele değişkeni, ilk olay gerçekleşinceye kadar geçen süreyi, X_2 rastgele değişkeni ise 1. gerçekleştikten sonra ikinci olayın gerçekleşinceye kadar geçen süreyi, X_n rastgele değişkeni ise $n-1$. olay gerçekleştikten sonra n. olayın gerçekleşinceye kadar geçen süreyi göstersin. $X_n, \quad n = 1,2,3,..$ rastgele dizisi, $\{N_t\}_{t\geq 0}$ sayma sürecinin varışlar arası sürelerinin dizisi olarak adlandırılır. $S_0 = 0$ ve $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ rastgele değişkeni ise n. olayın gerçekleşme zamanını verir. Bu durumda, S_n rastgele değişkeni bir sayma süreci ile şöyle ilişkilendirilebilir: Sabit her t için

$$N_t = max\{n : S_n \leq t\}$$

Bu yukarıdaki eşitlikten $\{N_t \geq n\}$ olayının $\{S_n \leq t\}$ olayına denk olduğunu da söylemek mümkündür.

Tanım. (Poisson Süreci) $\{N_t\}_{t\geq 0}$ bir sayma süreci ve $\lambda > 0$ olmak üzere, aşağıdaki özellikleri sağlayan sayma sürecine λ oranlı bir Poisson süreci adı verilir:

(Ö1) Süreç bağımsız artışlıdır yani ayrık zaman aralıklarında gerçekleşen olayların sayısı birbirinden bağımsızdır: Her $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$ sıralı zaman indeksi için $N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \ldots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ birbirinden bağımsızdır.

(Ö2) 1 birim zaman aralığında gerçekleşen olayların sayısı λ ortalamalı Poisson dağılımlı olup, t uzunluklu bir zaman aralığında gerçekleşen olayların sayısı λt ortalamalı Poisson dağılımlıdır:

$$\Pr\left(N_{t+s} - N_s = k\right) = \frac{e^{-\lambda t}\lambda t^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

(Ö3) $h \geq 0$ gibi küçük bir reel sayıyı göz önüne alalım; $[t, t+h)$ zaman aralığında 1 olayın gerçekleşmesi olasılığı,

$$\begin{aligned}
\Pr\left(N_{t+h} - N_t = 1\right) =& \Pr\left(N_h = 1\right) = e^{-\lambda h}\lambda h \\
=& \underbrace{\left(1 - \lambda h + \frac{\lambda h}{2} - \cdots\right)}_{\text{Taylor Açılımı}} \lambda h \\
=& \lambda h + o(h)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $o(h)$ ifadesi λh teriminden sonra geriye kalan terimlerin toplamının $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{o(h)}{h} = 0$ limit eşitliğini sağladığı anlamına gelmektedir. Diğer taraftan, $[t, t+h)$ zaman aralığında en az 2 olayın gerçekleşmesi olasılığı,

$$\Pr\left(N_{t+h} - N_t \geq 2\right) = \Pr\left(N_h \geq 2\right) = o(h)$$

olup, $[t, t+h)$ zaman aralığında olayın gerçekleşmemesi olasılığı,

$$\Pr\left(N_h = 0\right) = 1 - \Pr\left(N_h = 1\right) - \Pr\left(N_h \geq 2\right) = 1 - \lambda h - o(h)$$

şeklinde tanımlanır. Bu olasılık eşitlikleri şu anlama gelmektedir. Küçük zaman aralıklarında nicelik bakımından fazlaca olayların gerçekleşmesi olasılığı küçük değerler almaktadır.

Teorem. N_t bir Poisson süreci ve $X_n \quad n \geq 1$ rastgele değişkeni ise $n-1$. olaydan n. olaya kadar geçen süre olmak üzere, olaylar arası geçen süreler birbirinden bağımsız ve aynı $1/\lambda$ ortalamalı ile üstel dağılımlıdır.

Örnek. Bir benzin istasyonuna araçlar dakikada 2 ortalamalı Poisson sürecine göre geliş yapmaktadırlar. Buna göre,

(a) İlk 2 dakikada benzin istasyonuna araç gelmemesi olasılığı, $\Pr\left(N_2 = 0\right) =?$

(b) Herhangi bir 2 dakikalık süre zarfı içinde istasyona 1 aracın gelmesi olasılığı, $\Pr\left(N_{t+2} - N_t = 1\right) =?$

(c) Herhangi bir 2 dakikalık süre zarfı içinde istasyona en az 2 aracın gelmesi olasılığı, $\Pr\left(N_{t+2} - N_t \geq 2\right) =?$

(d) İlk dakikada 1, ilk 5 dakikada da 4 aracın gelmesi olasılığı, $\Pr\left(N_1 = 1, N_5 = 4\right) =?$

(e) $\Pr\left(N_2 = 2, N_4 = 3, N_8 = 6\right) =?$

Çözüm: (a)

$$\Pr\left(N_2 = 0\right) = \frac{e^{-2(2)}\left(2(2)\right)^0}{0!} = e^{-4} = 0.0183$$

(b)

$$\Pr\left(N_{t+2} - N_t = 1\right) = \Pr\left(N_2 = 1\right) = \frac{e^{-2(2)}\left(2(2)\right)^1}{1!} = e^{-2} = 0.0733$$

(c)

$$\Pr(N_{t+2} - N_t \geq 2) = 1 - \Pr(N_2 = 0) - \Pr(N_2 = 1) = 1 - 0.0183 - 0.0733 = 0.9084$$

(d)

$$\begin{aligned}
\Pr(N_1 = 1, N_5 = 4) &= \Pr(N_1 = 1, N_5 - N_1 + N_1 = 4) = \Pr(N_1 = 1, N_5 - N_1 = 3) \\
&= \underbrace{\Pr(N_1 = 1)\Pr(N_5 - N_1 = 3)}_{\text{Bağımsız artışlı olduğu için}} = \underbrace{\Pr(N_1 = 1)\Pr(N_4 = 3)}_{\text{Durağan artışlı olduğu için}} \\
&= \left(\frac{e^{-2(1)}(2(1))^1}{1!}\right)\left(\frac{e^{-2(4)}(2(4))^3}{3!}\right) = (0.2707)(0.0286) = 0.0077
\end{aligned}$$

Örnek. Bir parfümeri dükkanına gelişler Poisson sürecine uymaktadır ve saatte ortalama 20 müşteri gelmektedir. Yarım saatlik herhangi bir zaman dilimi içerisinde, ilk 15 dakikasında 3 müşterinin geldiği biliniyorken ikinci 15 dakika içinde 5 müşteri gelmesi olasılığı nedir? Ayrıca, 15. dakikadan sonra 4. müşterinin gelmesi olasılığı nedir?

Çözüm: İstenilen olasılık, $\Pr\left(N_{\frac{1}{2}} - N_{\frac{1}{4}} = 5 | N_{\frac{1}{4}} = 3\right)$ dir. Sürecin bağımsız ve durağan artışlılık özelliklerini kullanarak

$$\Pr\left(N_{\frac{1}{2}} - N_{\frac{1}{4}} = 5 | N_{\frac{1}{4}} = 3\right) = \Pr\left(N_{\frac{1}{2}} - N_{\frac{1}{4}} = 5\right) = \Pr\left(N_{\frac{1}{4}} = 5\right) = \frac{e^{-20(1/4)}5^5}{5!} = 0.1755$$

sonucuna ulaşılır.

İkinci olasılığı hesaplamak için, şöyle yola çıkalım; 15 dakikadan sonra 4. müşterinin gelmesi olayı 15 dakika içinde en fazla 3 müşterinin gelmesi demektir yani $N_{\frac{1}{4}} \leq 3$

olayına denk gelir buradan,

$$
\begin{aligned}
\Pr\left(N_{\frac{1}{4}} \leq 3\right) =& \Pr\left(N_{\frac{1}{4}} = 0\right) + \Pr\left(N_{\frac{1}{4}} = 1\right) + \Pr\left(N_{\frac{1}{4}} = 2\right) + \Pr\left(N_{\frac{1}{4}} = 3\right) \\
=& \left(\frac{e^{-5}5^0}{0!}\right) + \left(\frac{e^{-5}5^1}{1!}\right) + \left(\frac{e^{-5}5^2}{2!}\right) + \left(\frac{e^{-5}5^3}{3!}\right) \\
=& e^{-5}\left[1 + 5 + \frac{25}{2} + \frac{125}{6}\right] = 0.265
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

Örnek. Bir mağazaya gelişlerin λ oranlı Poisson sürecine uyduğu ve $[0,t)$ anında mağazaya n müşterinin geldiği bilinmektedir. $p \in [0,1]$ olmak üzere, $[0,pt)$ anında k müşterinin gelmesi olasılığı nedir?

Çözüm. İstenilen olasılık,

$$\Pr\left(N_{pt} = k | N_t = n\right)$$

dir. Burada, $k = 0, 1, 2, \cdots, n$ olabilir. Şimdi bu koşullu olasılığın eşitini bulmaya çalışalım;

$$
\begin{aligned}
\Pr\left(N_{pt} = k | N_t = n\right) =& \frac{\Pr\left(N_{pt} = k, N_t = n\right)}{\Pr\left(N_t = n\right)} = \frac{\Pr\left(N_{pt} = k, N_t - N_{pt} = n - k\right)}{\Pr\left(N_t = n\right)} \\
=& \frac{\Pr\left(N_{pt} = k\right)\Pr\left(N_t - N_{pt} = n - k\right)}{\Pr\left(N_t = n\right)} \\
=& \frac{\Pr\left(N_{pt} = k\right)\Pr\left(N_{(1-p)t} = n - k\right)}{\Pr\left(N_t = n\right)} \\
=& \frac{\left(\frac{e^{-\lambda pt}(\lambda pt)^k}{k!}\right)\left(\frac{e^{-\lambda(1-p)t}(\lambda(1-p)t)^{n-k}}{(n-k)!}\right)}{\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}} \\
=& \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}
\end{aligned}
$$

olup, bu koşullu olasılık p başarı olasılığı ile Binom dağılımını göstermektedir.

Örnek. N_t λ oranlı bir Poisson süreci ve X_1 rastgele değişkeni ise ilk birimin sisteme giriş zamanı olsun. $N_t = 1$ verilmişken, X_1 rastgele değişkeninin koşullu dağılımının $(0, t]$ aralığında düzgün dağılıma sahip olduğunu gösteriniz yani

$$\Pr(X_1 \leq x | N_t = 1) = \frac{x}{t}, \quad 0 < x \leq t.$$

Çözüm. $0 < x \leq t$ için koşullu olasılık,

$$\Pr(X_1 \leq x | N_t = 1) = \frac{P\left(X_1 \leq x, N_t = 1\right)}{P(N_t = 1)}$$

şeklinde yazılır. Öte yandan, biliyoruz ki

$$\Pr(N_t = 1) = e^{-\lambda t} \lambda t$$

ve

$$\Pr(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\Pr(X_1 \leq x, N_t = 1) &= \Pr\Big((0, x] \text{ aralığında bir gelişin olması ve } (x, t] \text{ hiç bir gelişin olmaması}\Big) \\
&= \Pr\Big(N_x = 1, N_t - N_x = 0\Big) \\
&= \Pr\Big(N_x = 1\Big) \Pr\Big(N_t - N_x = 0\Big) \\
&= \Big(e^{-\lambda x} \lambda x\Big) \Big(e^{-\lambda(t-x)}\Big) \\
&= \lambda x e^{-\lambda t}.
\end{aligned}$$

olup, istenilen sonuca ulaşılır.