Kuyruk Teorisi Ders Notları:

Bazı Kuyruk Modelleri

Mehmet YILMAZ

mehmetyilmaz@ankara.edu.tr

10 KASIM 2017

3. HAFTA

1.5 Üstel Dağılım

Poisson sayma sürecine göre dikkate alındığında, gelişler arası sürenin üstel dağılımlı olduğu söylenmişti. Üstel dağılımın hafızasızlık özelliği ise, kuyruk modelini analiz etmede epey bir kolaylık sağlamaktadır. Bu şu demek oluyor: Kuyruk sistemine sonra gelen müşterinin h birim zaman beklemesi olasılığı, öncekilerin ne kadar sürede beklediğine bağlı değildir sadece nitelik olarak h nin büyüklüğüne bağlıdır.

Ona göre, X rastgele değişkeni $\lambda > 0$ parametreli üstel dağılıma sahip ise dağılım fonksiyonu, F aşağıdaki gibidir.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \\ 1 - e^{-\lambda x}, & 0 \leq x \end{cases}$$

Notasyon olaarak $X \sim Exp\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ şeklinde gösterilecektir.

Tanım. Negatif değerler almayan X rastgele değişkeni için aşağıdaki eşitlik geçerli ise Markov özelliğine sahiptir denilir:

$$\Pr\left(X > t + h \mid X > t\right) = \Pr\left(X > h\right) \qquad \forall t, h \in \mathbb{R}_0^+$$

Önerme 1. $X \sim Exp\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ ise Markov özelliğine sahiptir.

Kanıt. $t, h \in \mathbb{R}_0^+$ için

$$\begin{aligned}\Pr(X > t + h \mid X > t) = \frac{Pr(X > t + h, X > t)}{Pr(X > t)} = \frac{\Pr(X > t + h)}{\Pr(X > t)} = \\ = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = Pr(X > h)\end{aligned}$$

□

Teorem. Negatif değerler almayan X sürekli rastgele değişkeni Markov özelliğine sahip ise X rastgele değişkeninin dağılımı üsteldir.

Kanıt. $X \geq 0$ sürekli rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu:

$$F(t) = P[X \leq t]$$

şeklinde gösterilsin. Markov özelliğine sahip olduğundan $t, h \geq 0$ için aşağıdaki gerektirme yazılabilir:

$$\Pr(X > t + h \mid X > t) = \Pr(X > h) \Leftrightarrow \underbrace{\Pr(X > t + h, X > t)}_{Pr(X > t+h)} = \Pr(X > t)\Pr(X > h)$$

Çift gerektirmenin sağındaki ifadeyi göz önüne alalım; $\bar{F}(x) = \Pr(X > t) = 1 - F(x)$ olmak üzere, $\bar{F}(t + h) = \bar{F}(t)\bar{F}(h)$ eşitliği geçerlidir. $t, h \geq 0$ olduğu için özel olarak $t = h = 0$ seçelim. Olasılık değeri negatif olamayacağından aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\bar{F}(0 + 0) = \bar{F}(0)\bar{F}(0) \implies \bar{F}(0) \in \{0, 1\}$$

Şimdi, $\bar{F}(0) = 0$ olduğunu kabul edelim. Buna göre,$t > 0$ için $\bar{F}(t) = \bar{F}(t + 0) =$

$\bar{F}(t)\bar{F}(0) = 0$ olacaktır. Bu sonuç anlamsızdır. Dolayısı ile $\bar{F}(0) = 1$ olmalıdır. Zaten dağılım fonksiyonunun tümleyeni olduğu için bu sonuç böyle olmak zorundadır.

Şimdi yinelemeli adımlar ile aşağıdaki sonucu elde edebiliriz: Her $t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\bar{F}\left((n-1)t+t\right) =& \bar{F}\left((n-1)t\right)\bar{F}\left(t\right) = \bar{F}\left((n-2)t+t\right)\bar{F}\left(t\right) = \bar{F}\left((n-2)t\right)\bar{F}\left(t\right)^2 \\ &= \cdots = \bar{F}\left(0\right)\bar{F}\left(t\right)^n = \bar{F}\left(t\right)^n\end{aligned}$$

Özel olarak, $n \in \mathbb{N}$ için $\bar{F}(n) = \bar{F}(1)^n$ olur.

$p, q \in \mathbb{N}$ olmak üzere, yukarıda $t = p/q$ ve $n = q$ alınırsa bu sonuçtan yola çıkarak aşağıdaki eşitliği elde edebiliriz:

$$\bar{F}\left(\frac{p}{q}\right)^q = \bar{F}\left(\frac{p}{q}q\right) = \bar{F}(1)^p \implies \bar{F}\left(\frac{p}{q}\right) = \bar{F}(1)^{\frac{p}{q}}$$

F sürekli olduğu için $\bar{F}$ de süreklidir. Bu durumda, $t \in \mathbb{R}^+$ süreklilik noktalarına rasyonel sayıların bir dizisi ile yaklaşabiliriz $\{r_n\} \to t$. Buradan,

$$\bar{F}(t) = \bar{F}(1)^t = e^{\log(\bar{F}(1))t}$$

eşitliği elde edilir. Öte yandan, F bir dağılım fonksiyonu olduğundan, $\bar{F}(1) \leq \bar{F}(0)$ dir. Buradan, $\log(\bar{F}(1)) \leq \log(\bar{F}(0)) = 0$ sonucuna ulaşılır. $\lambda > 0$ olmak üzere, $\lambda = -\log(\bar{F}(1))$ alınırsa, $\bar{F}(1) = e^{-\lambda}$ olur ki, yukarıdaki son eşitlikten $\bar{F}(t) = e^{-\lambda t}$ ifadesine ulaşılır. Böylece istenilen sonuç elde edilir.

$\square$

Örnek. Bir benzin istasyonuna yakıt almak için geliş yapan araçların bir saatlik zaman dilimi içerisindeki sayısı $\lambda = 5$ olan bir Poisson sürecine uymaktadır. Herhangi bir saatlik zaman dilimi içerisinde pompacının ilk aracın gelmesi için 20 dakikadan fazla beklemesi olasılığı nedir? Herhangi bir bir saatlik zaman dilimi içerisinde 2. müşterisinin gelmesi için 30 dakikadan fazla beklemesi olasılığı nedir?

Çözüm. X_1 rastgele değişkeni ilk aracın benzin istasyonuna geliş zamanı olsun. Pompacının ilk aracın gelmesi için 20 dakikadan fazla beklemesi olayı daha önce (ilk 20 dakika) hiçbir aracın istasyona yakıt almak için giriş yapmaması olayına denktir yani $\left\{X_1 > \frac{20}{60}\right\} \equiv \left\{N_{t=\frac{20}{60}} = 0\right\}$ dir. Buradan,

$$\Pr\left(X_1 > \frac{20}{60}\right) = \Pr\left(N_{\frac{20}{60}} = 0\right) = e^{-5\left(\frac{20}{60}\right)} = 0.1889$$

olarak hesaplanır. Burada unutmamak gerekir ki Poisson sürecinde gelişler arası geçen süre $1/\lambda$ ortalamalı üstel dağılımlıdır. Birinci müşterinin geliş zamanı ile ikinci müşterinin geliş zamanı arasındaki farkı X_2 rastgele değişkeni ile gösterelim. Bu durumda, Pompacının ikinci müşterinin gelmesi için 30 dakika dan fazla beklemesi olayı, ilk 30 dakika içinde en fazla bir müşterinin gelmesi olayına denktir yani $\left\{X_1 + X_2 > \frac{30}{60}\right\} \equiv \left\{N_{t=\frac{30}{60}} < 2\right\}$ dir. Buradan,

$$\Pr\left(X_1 + X_2 > \frac{30}{60}\right) = \Pr\left(N_{\frac{30}{60}} = 0\right) + \Pr\left(N_{\frac{30}{60}} = 1\right) = e^{-5\left(\frac{30}{60}\right)}\left[1 + 5\frac{30}{60}\right] = 0.2873$$

olarak hesaplanır. Burada da hatırlatmak gerekir ki Bağımsız üstel dağılımlı rastgele değişkenlerin toplamı Erlang dağılımına sahiptir. Dolayısı ile, bu olasılığı ölçek parametresi 2, şekil parametresi $1/\lambda$ olan Erlang dağılımı yardımı ile de hesaplamak mümkündür:

$$\Pr\left(X_1 + X_2 > 0.5\right) = \int_{0.5}^{\infty} \lambda^2 t e^{-\lambda t} dt = 0.2873.$$