Kuyruk Teorisi Ders Notları:

Bazı Kuyruk Modelleri

Mehmet YILMAZ

mehmetyilmaz@ankara.edu.tr

10 KASIM 2017

4. HAFTA

2 Tek kanallı, sonsuz kapasiteli, kuyruk sistemi M/M/1/∞/∞

Birimlerin sisteme gelişleri arasındaki geçen sürenin $1/\lambda$ ortalamalı, birimlerin hizmet sürelerinin ise $1/\mu$ ortalamalı üstel dağılıma sahip olduğu düşünülmektedir. Bu kuyruk sisteminde tek servis kanalı olup, kapasitenin sonsuz, birimlerin kaynağının da sonsuz olduğu düşünülmektedir. Böyle bir sıra bekleme sistemini "t" anında gözlediğimizi düşünelim."t" zamanında, bu sistemde $n > 0$ sayıda birim (müşteri) bulunması olasılığı $P_n(t)$ ile ilgileneceğiz.

Eğer bu olasılık bilinirse, sistemde olması beklenen birim sayısı, kuyrukta olması beklenen birim sayısı, birim bazında ortalama sistemde kalma süresi, ortalama kuyrukta bekleme süresi gibi karakteristikler de tanımlanabilir. "t" anında Δ_t gibi küçük bir öteleme yapılsın. Δ_t öyle küçük bir sayı olsun ki, $(t, t+\Delta_t]$ zaman aralığında en fazla bir birim sisteme giriş yapsın.

"t" anında sistemde n birim olması olayı aşağıdaki 4 durum ile açıklanabilir:

1 Sistemde "t" anında n birim var ve $(t, t+\Delta_t]$ zaman aralığında hiçbir birim sisteme giriş yapmayabilir ve sistemden çıkış olmayabilir. "$t+\Delta_t$" anında sistemde n birim olması olasılığı ise, Δ_t küçük bir değer olduğundan, Poisson süreci için yukarıda verilen 3. özelliğinden

$$P_n(t+\Delta_t) = P_n(t)(1-\lambda\Delta_t)(1-\mu\Delta_t) \tag{1}$$

2 Sistemde "t" anında $n-1$ birim var ve $(t, t+\Delta_t]$ zaman aralığında 1 birim sis-

teme giriş yapabilir ve hiçbir birim bu zaman aralığında hizmet alıp sistemden çıkmayacaktır. "$t + \Delta_t$" anında sistemde n birim olması olasılığı ise,

$$P_n(t + \Delta_t) = P_{n-1}(t)(\lambda\Delta_t)(1 - \mu\Delta_t) \tag{2}$$

3 Sistemde "t" anında $n+1$ birim var ve $(t, t+\Delta_t]$ zaman aralığında 1 birim sistemden hizmet alıp çıkabilir ve hiçbir birim bu zaman aralığında hizmet almak için sisteme giriş yapmayacaktır. "$t + \Delta_t$" anında sistemde n birim olması olasılığı ise,

$$P_n(t + \Delta_t) = P_{n+1}(t)(1 - \lambda\Delta_t)(\mu\Delta_t) \tag{3}$$

4 Sistemde "t" anında n birim var ve $(t, t + \Delta_t]$ zaman aralığında 1 birim sistemden hizmet alıp çıkabilir ve bu zaman aralığında hizmet almak için 1 birim sisteme giriş yapabilir. "$t + \Delta_t$" anında sistemde n birim olması olasılığı ise,

$$P_n(t + \Delta_t) = P_n(t)(\lambda\Delta_t)(\mu\Delta_t) \tag{4}$$

Bu 4 durumun olasılıklar bakımından eşitlikleri toplanırsa,

$$\begin{aligned} P_n(t + \Delta_t) = & P_n(t)(1 - \lambda\Delta_t)(1 - \mu\Delta_t) \\ & + P_{n-1}(t)(\lambda\Delta_t)(1 - \mu\Delta_t) \\ & + P_{n+1}(t)(1 - \lambda\Delta_t)(\mu\Delta_t) \\ & + P_n(t)(\lambda\Delta_t)(\mu\Delta_t) \end{aligned} \tag{5}$$

eşitliği elde edilir. Eğer $P_n(t)$ ifadesi eşitliğin sol tarafına atılırsa ve eşitliğin her iki tarafı Δ_t ile bölünürse ve $\Delta_t \to 0$ için limit alınırsa, aşağıdaki eşitliği elde ederiz;

$$\lim_{\Delta_t \to 0} \frac{P_n(t+\Delta_t) - P_n(t)}{\Delta_t} = -(\lambda+\mu)P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t) \tag{6}$$

Sistem kararlı durumda iken $P_n(t)$ zamana bağlı olarak değişmez dolayısı ile (6) ifadesinin solundaki türev ifadesi sıfıra eşit olacaktır. Kararlı durumlarda sistemi inceleyeceğimiz için artık $P_n(t) = P_n$ almakta bir sakınca yoktur. buna göre, 6 ifadesi aşağıdaki gibi olur:

$$-(\lambda+\mu)P_n + \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} = 0 \tag{7}$$

Bu ikinci dereceden homojen bir fark denklemidir. Çözüm olarak yinelemeli adımlar ile de sonuca ulaşmak mümkündür.

- Sistemde $n = 0$ birim olması durumu: $P_1 = 0$ ve $\mu P_0 = 0$ (sistemde hiç birim yok iken hizmet alıp çıkması olayı bağdaşmaz) olup (7) için aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$-\lambda P_0 + \mu P_1 = 0 \implies P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 \tag{8}$$

- Sistemde $n = 1$ birim olması durumu: $P_1 = 0$ ve $\mu P_0 = 0$ (sistemde hiç birim yok iken hizmet alıp çıkması olayı bağdaşmaz) olup (7) için aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$-\mu P_1 + \lambda P_0 - \lambda P_1 + \mu P_2 = 0 \implies P_2 = \frac{\lambda}{\mu} P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 \tag{9}$$

- İşlemler yinelemeli şekilde yapılırsa, P_n olasılığı için $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ olmak üzere,

$$P_n = \rho^n P_0 \tag{10}$$

  şeklinde bir eşitlik elde edilir.

Mümkün olaylar üzerinden olasılıkların toplamı (birim sayıları doğal sayıların bir elemanı olduğu için) 1 değerini vermelidir yani $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ olmalıdır. Buna göre, $\rho < 1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = P_0 \frac{1}{1-\rho} = 1 \implies P_0 = 1 - \rho$$

olup, (10) ifadesi

$$P_n = \rho^n(1-\rho) \tag{11}$$

biçiminde ifade edilir. Artık, $M/M/1/\infty/\infty$ sisteminin karakteristiklerini bulabiliriz.

2.1 $M/M/1/\infty/\infty$ sistemi için kuyrukta olması beklenen birim sayısı

Bu sistemde kuyruk oluşabilmesi için bir birimin hizmet alırken, sisteme giriş yapan birimlerin belirli bir düzenek ile dizilmeleri gerekir yani $n \geqslant 2$ durumunda sistemde kuyruk oluşur. Buna göre,

$$L_q = \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\rho^n(1-\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n+1}(1-\rho) = \rho^2 \sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1}(1-\rho) = \frac{\rho^2}{1-\rho} \tag{12}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliği elde ederken, başarı olasılığı $(1-\rho)$ olan geometrik dağılımın beklenen değeri için eşitini kullandık.

2.2 $M/M/1/\infty/\infty$ sistemi için serviste olması beklenen birim sayısı

Bu sistemde $n \geqslant 1$ durumunda sistemde hep bir kişi hizmet görüyor olacaktır. Buna göre,

$$L_{servis} = \sum_{n=1}^{\infty} 1\rho^n(1-\rho) = \rho \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{n-1}(1-\rho) = \rho \tag{13}$$

2.3 $M/M/1/\infty/\infty$ sistemi için sistemde olması beklenen birim sayısı

Bu sistemde $n = 0, 1, 2, ...$ durumu göz önüne alınarak bir beklenen değer bulunacaktır.

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n(1-\rho) = \rho \sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1}(1-\rho) = \frac{\rho}{1-\rho} \tag{14}$$

Aynı sonuca, kuyrukta olması beklenen birim sayısı ile serviste olması beklenen birim sayısının toplamını elde ederek ulaşabiliriz:

$$L = L_q + L_{servis} \implies L = \frac{\rho^2}{1-\rho} + \rho = \frac{\rho}{1-\rho}$$

2.4 $M/M/1/\infty/\infty$ sistemi için birim başına kuyrukta geçen beklenen süre

Little kanunları kararlı bir sistemde kuyrukta veya sistemde olan ortalama birim sayısı ile kuyrukta veya sistemde birim başına beklenen süre arasında bir ilişki olduğunu söyler. Bu ilişki şöyle tanımlanır:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)\lambda} = \frac{\rho}{(\mu-\lambda)} = \frac{\lambda}{(\mu-\lambda)\mu} \tag{15}$$

2.5 $M/M/1/\infty/\infty$ sistemi için birim başına serviste geçen beklenen süre

Little kanunlarına göre birim başına serviste geçen ortalama süre

$$W_{servis} = \frac{L_{servis}}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda} = \frac{1}{\mu} \tag{16}$$

2.6 $M/M/1/\infty/\infty$ sistemi için birim başına sistemde geçen beklenen süre

Benzer biçimde, Little kanunlarına göre birim başına sistemde geçen ortalama süre

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{\rho}{(1-\rho)\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda} \tag{17}$$

Öte yandan, $L = L_q + L_{servis}$ olduğu hatırlanırsa, $W = W_q + W_{servis}$ eşitliği elde edilir.

Şimdi kararlı sistemler için $(0, t]$ gibi bir zaman aralığında, sisteme giriş yapan ortalama birim sayısı ile sistemden hizmet alıp çıkış yapan ortalama birim sayısının dengede olduğu bilinmektedir (doğum-ölüm süreçleri gibi). A rastgele değişkeni ile sisteme $(0, t]$ zaman aralığında giriş yapan birimlerin sayısını, D rastgele değişkeni ile sistemden $(0, t]$ zaman aralığında hizmet alıp çıkan birimlerin sayısını gösterelim. Bu durumda,

$$E[A] = \lambda t \underbrace{[P_0 + P_1 + P_2 + ... + P_n + P_{n+1} + ...]}_{=1}$$

ve

$$E[D] = \mu t \underbrace{[1P_1 + 1P_2 + 1P_3 + ... + 1P_n + 1P_{n+1} + ...]}_{=L_{servis}}$$

biçiminde elde edilirler. Denge durumu göz önüe alınırsa

$$E[A] = E[D] \implies L_{servis} = \frac{\lambda}{\mu}$$

serviste olması beklenen birim sayısı elde edilebilir.

Örnek 2.1. Tek bir pisti olan bir hava alanına saatte 3 uçak iniş yapmaktadır. Herhangi bir uçağın kalkış için hazırlanması ortalama 10 dakika, hava alanından ayrılması ise ortalama 5 dakika sürmektedir. Buna göre,

(a) Servis hızını,

(b) Trafik hızını,

(c) Bir saatlik zaman dilimi içerisinde, kalkış yapmayı bekleyen ortalama uçak sayısını,

(d) Bir uçağın kalkış için beklediği ortalama süreyi (dakika cinsinden),

bulunuz.

Çözüm: (a) Herhangi bir uçağın pistten ayrılma süresi ortalama $10+5=15$ dakikadır. Dolayısı ile havaalanı saatte 4 uçağa hizmet verebiliyor yani $\mu=4$ olarak bulunur.
(b) $\lambda=3$ olup, $\rho=\dfrac{\lambda}{\rho}=\dfrac{3}{4}$ hava alanı sistemi için trafik hızıdır.
(c) $L_q=\dfrac{\rho^2}{1-\rho}=\dfrac{(9/16)}{1-3/4}=2.25\cong 2$ kalkış için sırada bekleyen ortalama uçak sayısıdır (herhangi bir bir saatlik zaman dilimi içersinde).
(d) $W_q=\dfrac{L_q}{\lambda}=\dfrac{2.25}{3}=0.75\times 60=45$ dakika olarak bulunur.