Kuyruk Teorisi Ders Notları:

Bazı Kuyruk Modelleri

Mehmet YILMAZ

mehmetyilmaz@ankara.edu.tr

10 KASIM 2017

6. HAFTA

3 Tek kanallı, 1 kapasiteli, kuyruk sistemi M/M/1/1/∞

Birimlerin sisteme gelişleri arasındaki geçen sürenin $1/\lambda$ ortalamalı, birimlerin hizmet sürelerinin ise $1/\mu$ ortalamalı üstel dağılıma sahip olduğu düşünülmektedir. Bu kuyruk sisteminde tek servis kanalı olup, en fazla bir birime hizmet verebilmektedir. Birimlerin kaynağının da sonsuz olduğu düşünülmektedir. Böyle bir sıra bekleme sistemini "t" anında gözlediğimizi düşünelim."t" zamanında, bu sistemde $n > 0$ sayıda birim (müşteri) bulunması olasılığı P_n ile ilgileneceğiz. Denklem (7) dikkate alınırsa,

- Sistemde $n = 0$ birim olması durumu

$$-\lambda P_0 + \mu P_1 = 0 \implies P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 \tag{20}$$

- Sistemde $n = 1$ birim olması durumu

$$-\mu P_1 + \lambda P_0 = 0 \implies P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 \tag{21}$$

Her iki denklemden de aynı eşitlik elde edilmiştir. Öte yandan bu iki durumun dışında başka bir durum olmadığından, $P_0 + P_1 = 1$ olup, $P_0 = \dfrac{1}{1+\rho}$ elde edilir. Bunun yanında servis kanalı sayısı kadar kapasiteye sahip sistemde herhangi bir kuyruk oluşumuna izin verilmemektedir. Sistem o an dolu ise, sonra gelen birim hizmet alamadan sistemden ayrılır. Dolayısı ile, $L_q = 0$ ve $W_q = 0$ dır.

Sistemde olması beklenen birim sayısı:

$$L = 0P_0 + 1P_1 = P_1 = \frac{\rho}{1+\rho} = L_{servis}$$

Sistemde geçen beklenen süre: Sistem dolu olduğunda, hizmet için gelen birimler geri dönmektedir. Dolayısı ile, λ hızı kadar geliş olsa da etkin olarak hizmet alamayanları dikkate almamak gerekir. Bu durumda geliş hızını sistemin boş kalması olasılığı ile çarparsak etkili geliş hızını elde edebiliriz: $\lambda_{eff} = \lambda(1 - P_1)$. Bu durumda, $\lambda - \lambda_{eff}$ farkı hizmeti almadan geri dönen ortalama birim sayısıdır. Sistem planlama mühendisleri için bu ortalama önemlidir çünkü hizmet kapasitesini artırıp artırmama risklerini bu sayıya göre hesaplayabilirler.

$$W = \frac{L}{\lambda_{eff}} = \frac{1}{\mu} = W_{servis}$$

Örnek 3.1. Birimlerin gelişler arası süresi ve hizmet süreleri üstel dağılımlı olan tek kanallı bir sistemde gelişler arası ortalama süre 10 dakika ve servis süresi ortalama 8 dakika olsun.

(a) Gelen bir müşterinin hizmet görmesi olasılığını,

(b) Sistemin dolu olması olasılığını,

(c) Saatte hizmet gören ortalama müşteri sayısını,

(d) Sistemden hizmet alarak çıkanların ortalama sayısını,

(e) Bir müşterinin sistemde ortalama harcadığı süreyi,

hesaplayınız.

Çözüm: Sisteme bir saatlik zaman dilimi içerisindeki geliş hızı, $\lambda = 6$ olarak elde edilir.

Buna karşın, servis hızı $\mu = 7.5$ olup, trafik hızı ise $\rho = 4/5$ biçiminde hesaplanır.

(a) Sistemin boş olma olasılığına denktir; $P_0 = \dfrac{1}{1+4/5} = 5/9 = 0.5556$.

(b) $P_1 = 1 - P_0 = 1 - 0.556 = 0.4444$.

(c) $L = 0.4444$.

(d) $\lambda_{eff} = 6(5/9) = 10/3$. Yaklaşık olarak saatte ortalama üç müşterinin hizmet alması beklenir. Bu durumda, ortalama 3 müşteri de sistem dolu olduğu için hizmet alamaz.

(e) $W = \dfrac{1}{15/2} = 2/15$ veya 8 dakikadır.

NOT

* $\rho < 1$ olmak zorunda değildir.

Örnek 3.2. Bir kasabada, sadece bir taksisi bulunan bir taksi durağında müşteriler ortalama 20 dakikada bir gelmektedir. Taksinin hizmeti tamamlayıp geri dönmesi ortalama 1 saati bulmaktadır. Buna göre, hizmet için gelipte, hizmet alamayan ortalama müşteri sayısını bulunuz.

Çözüm: Sisteme bir saatlik zaman dilimi içerisindeki geliş hızı $\lambda = 3$, servis hızı $\mu = 1$ olup, trafik hızı ise $\rho = 3$ biçiminde hesaplanır. $\lambda - \lambda_{eff} = 3 - 3(1/4) = 9/4 \approx 2$ olup, yaklaşık olarak saatte ortalama 2 müşteri sistem dolu olduğu için hizmet alamaz.

Örnek 3.3. Haftanın 6 günü açık olan bir otomobil kiralama şirketinin kiraya verebilecek henüz bir tek arabası vardır. Günlüğü 300 liradan otomobil kiralamaktadır. Şirkete ortalama 2 günde 1 müşteri gelmekte olup, ortalama kiralam süresi ise 2.5 gündür. Araç eğer kirada ise müşteriler sıraya girmemekte başka bir şirkete yönelmektedir. İlgili kuyruk modelini oluşturup, parametreleri elde ediniz.

Çözüm: Sistem $M/M/1/1$ kuyruksuz sistemdir. Geliş hızı, $\lambda = 3$ (haftada 3 müşteri aramaktadır), servis hızı ise saatte $\mu = 2.4$' tür. Buradan trafik yoğunluğu $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{5}{4} = 1.25$ olduğu görülür.

- $P_0 = \dfrac{\rho}{1+\rho} = \dfrac{(5/4)}{9/4} = 5/9$

- $P_1 = 1 - P_0 = 4/9$

- Haftalık ortalama hizmet alan müşteri sayısı, $\lambda_{eff} = \lambda[1 - P_1] = 3(5/9) = 5/3$

- Haftalık hizmet alamayan ortalama müşteri sayısı, $\lambda - \lambda_{eff} = 4/3$

- Haftalık ortalama gelir, $300 \times 2.5 \times (5/3) = 1250$

- Haftalık ortalama kayıp, $300 \times 2.5 \times (4/3) = 1000$

M/M/1/1 Kuyruk Sistemi için Formüller

λ geliş hızı, gelişler arası zaman $\frac{1}{\lambda}$ ortalamalı üstel dağılım

μ servis hızı, birimlerin servis süresi $\frac{1}{\mu}$ ortalamalı üstel dağılım

n sistemde bulunan birim sayısı

ρ trafik yoğunluğu $\frac{\lambda}{\mu}$

P_0 sistemin boş kalması olasılığı $\frac{1}{1+\rho}$

P_1 sistemin dolu olması olasılığı $\frac{\rho}{1+\rho}$

$L_q = 0$

$L_{servis} = L = P_1 = \frac{\rho}{1+\rho}$

$L = L_{servis} = \frac{\rho}{1+\rho}$

$\lambda_{eff} = \lambda P_0 = \frac{\lambda}{1+\rho}$

$W_q = 0$

$W_{servis} = \frac{L_{servis}}{\lambda_{eff}} = \frac{1}{\mu}$

$W = W_{servis} = \frac{1}{\mu}$