Kuyruk Teorisi Ders Notları:

Bazı Kuyruk Modelleri

Mehmet YILMAZ

mehmetyilmaz@ankara.edu.tr

10 KASIM 2017

7. HAFTA

4 Tek kanallı, sonlu N kapasiteli, kuyruk sistemi M/M/1/N/∞

Birimlerin sisteme gelişleri arasındaki geçen sürenin $1/\lambda$ ortalamalı, birimlerin hizmet sürelerinin ise $1/\mu$ ortalamalı üstel dağılıma sahip olduğu düşünülmektedir. Bu kuyruk sisteminde tek servis kanalı olup, kapasitenin N gibi sonlu birim ile sınırlandırıldığı, birimlerin kaynağının da sonsuz olduğu düşünülmektedir. Bu tür kapasiteli sistemlerde, $N+1$. veya daha sonraki birimler sistemden hizmet görmeden ayrılırlar. Böyle bir sıra bekleme sistemini "t" anında gözlediğimizi düşünelim."t" zamanında, bu sistemde $n > 0$ sayıda birim (müşteri) bulunması olasılığı $P_n(t)$ ile ilgileneceğiz. Bunun için $M/M/1/\infty/\infty$ sistemini tanıtırken elde edilen eşitlik (7)' yi kullanacağız.
Sistemde n birim olması olayı, aşağıdaki 3 durum ile açıklanabilir:

1 $n = 0$ için

$$0 = -\lambda P_0 + \mu P_1 \implies P_1 = \rho P_0 \tag{22}$$

2 $n \in [1, N-1]$ için

$$0 = -(\lambda + \mu)P_n + \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} \tag{23}$$

3 $n = N$ için

$$0 = -\mu P_N + \lambda P_{N-1} \implies P_N = \rho P_{N-1} \tag{24}$$

Şimdi, (22) ve (23) dikkate alınırsa,

$$P_n = \rho^n P_0, n = 0, 1, 2, ..., N \tag{25}$$

ifadesi elde edilir. Şimdi P_0 ifadesinin ne olduğunu bulalım; $\sum_{n=0}^{N} P_n = 1$ olduğu düşüncesi ile,

$$P_0 \sum_{n=0}^{N} \rho^n = P_0 \frac{1-\rho^{N+1}}{1-\rho} = 1 \implies P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \tag{26}$$

elde edilir.

****NOT:** Bu kuyruk sisteminde $\rho \geq 1$ olabilir.

Artık, $M/M/1/N/\infty$ sisteminin karakteristiklerini bulabiliriz.

4.1 $M/M/1/N/\infty$ sistemi için kuyrukta olması beklenen birim sayısı

Bu sistemde kuyruk oluşabilmesi için bir birimin hizmet alırken, sisteme giriş yapan birimlerin belirli bir düzenek ile dizilmeleri gerekir yani $n \geqslant 2$ durumunda sistemde kuyruk oluşur. Buna göre,

$$\begin{aligned}
L_q =& \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \sum_{n=2}^{N} (n-1)\rho^n = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \sum_{n=0}^{N-2} (n+1)\rho^{n+2} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \rho^2 \sum_{n=0}^{N-2} (n+1)\rho^n \\
=& \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \rho^2 \frac{d\left[\sum_{n=0}^{N-2} \rho^{n+1}\right]}{d\rho} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \rho^2 \frac{d\left[\dfrac{\rho-\rho^N}{1-\rho}\right]}{d\rho} \\
=& \frac{\rho^2}{1-\rho^{N+1}} \frac{1+\rho^N(N-1)-N\rho^{N-1}}{1-\rho} = \frac{\rho^2\left(1+\rho^N(N-1)-N\rho^{N-1}\right)}{\left(1-\rho^{N+1}\right)(1-\rho)}
\end{aligned} \tag{27}$$

eşitliği elde edilir.

4.2 $M/M/1/N/\infty$ sistemi için serviste olması beklenen birim sayısı

Bu sistemde $n \geqslant 1$ durumunda sistemde hep bir kişi hizmet görüyor olacaktır. Buna göre,

$$L_{servis} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \sum_{n=1}^{N} 1\rho^n = \frac{\rho - \rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}} = \rho\left[1 - P_N\right] \tag{28}$$

4.3 $M/M/1/N/\infty$ sistemi için sistemde olması beklenen birim sayısı

Bu sistemde $n = 0, 1, 2, \cdots N$ durumu göz önüne alınarak bir beklenen değer bulunacaktır.

$$\begin{aligned} L =& \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \sum_{n=0}^{N} n\rho^n = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \rho \sum_{n=0}^{N} n\rho^{n-1} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \rho \frac{d\left[\sum_{n=0}^{N} \rho^n\right]}{d\rho} \\ =& \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \rho \frac{d\left[\dfrac{1-\rho^{N+1}}{1-\rho}\right]}{d\rho} = \frac{\rho\left(1 - \rho^N(N+1) + N\rho^{N+1}\right)}{\left(1-\rho^{N+1}\right)\left(1-\rho\right)} \\ =& \frac{\rho}{1-\rho} + (N+1)\left[1 - \frac{1}{1-\rho^{N+1}}\right] \end{aligned} \tag{29}$$

Aynı sonuca, kuyrukta olması beklenen birim sayısı ile serviste olması beklenen birim sayısının toplamını elde ederek ulaşabiliriz:

$$\begin{aligned} L =& L_q + L_{servis} \implies L = \frac{\rho^2\left(1 + \rho^N(N-1) - N\rho^{N-1}\right)}{\left(1-\rho^{N+1}\right)\left(1-\rho\right)} + \frac{\rho\left(1-\rho^N\right)}{\left(1-\rho^{N+1}\right)} \\ =& \frac{\rho}{1-\rho} + (N+1)\left[1 - \frac{1}{1-\rho^{N+1}}\right] \end{aligned}$$

4.4 $M/M/1/N/\infty$ sistemi için birim başına kuyrukta geçen beklenen süre

Sistem dolu olduğunda, yani sistemde N birim olduğunda, hizmet için gelen birimler geri dönmektedir. Dolayısı ile, λ hızı kadar geliş olsa da etkin olarak hizmet alamayanları dikkate almamak gerekir. Geliş hızını sistemin boş kalması olasılığı ile çarparsak etkili geliş hızını elde edebiliriz: $\lambda_{eff} = \lambda(1 - P_N)$. Bu durumda, $\lambda - \lambda_{eff}$ farkı hizmeti almadan geri dönen ortalama birim sayısıdır. Sistem planlama mühendisleri için bu ortalama önemlidir çünkü hizmet kapasitesini arttırıp arttırmama, servis kanal sayısını arttırıp arttırmama, servis hızını geliştirip geliştirmeme gibi risklerini bu sayıya göre hesaplayabilirler.

Little kanunu, kararlı bir sistemde kuyrukta veya sistemde olan ortalama birim sayısı ile kuyrukta veya sistemde birim başına beklenen süre arasında bir ilişki olduğunu söyler. Bu ilişki şöyle tanımlanır:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{eff}} = \frac{\lambda\left(1 + \rho^N(N-1) - N\rho^{N-1}\right)}{\mu(\mu-\lambda)\left(1-\rho^N\right)} \tag{30}$$

4.5 $M/M/1/N/\infty$ sistemi için birim başına serviste geçen beklenen süre

Little kanunlarına göre birim başına serviste geçen ortalama süre

$$W_{servis} = \frac{L_{servis}}{\lambda_{eff}} = \frac{\rho\left[1-P_N\right]}{\lambda\left[1-P_N\right]} = \frac{1}{\mu} \tag{31}$$

şeklinde elde edilir.

4.6 $M/M/1/N/\infty$ sistemi için birim başına sistemde geçen beklenen süre

Benzer biçimde, Little kanunlarına göre birim başına sistemde geçen ortalama süre

$$\begin{aligned} W =& \frac{L}{\lambda_{eff}} = \frac{\lambda\left(1+\rho^N(N-1)-N\rho^{N-1}\right)}{\mu(\mu-\lambda)\left(1-\rho^N\right)} + \frac{1}{\mu} \\ =& \frac{\mu\left(1-\rho^N\right)-N\lambda\rho^{N-1}\left(1-\rho\right)}{\mu(\mu-\lambda)\left(1-\rho^N\right)} \end{aligned} \tag{32}$$

Öte yandan, $L = L_q + L_{servis}$ olduğu hatırlanırsa, $W = W_q + W_{servis}$ eşitliği elde edilir.

Kararlı sistemler için $(0, t]$ gibi bir zaman aralığında, sisteme giriş yapan ortalama birim sayısı ile sistemden hizmet alıp çıkış yapan ortalama birim sayısının dengede olduğu bilinmektedir (doğum-ölüm süreçleri gibi). A rastgele değişkeni ile sisteme $(0, t]$ zaman aralığında giriş yapan birimlerin sayısını, D rastgele değişkeni ile sistemden $(0, t]$ zaman aralığında hizmet alıp çıkan birimlerin sayısını gösterelim. Bu durumda,

$$E[A] = \lambda t \underbrace{\left[P_0 + P_1 + P_2 + ... + P_{N-2} + P_{N-1}\right]}_{=1-P_N}$$

ve

$$E[D] = \mu t \underbrace{\left[1P_1 + 1P_2 + 1P_3 + ... + 1P_{N-1} + 1P_N\right]}_{=L_{servis}=1-P_0}$$

biçiminde elde edilirler. Denge durumu göz önüe alınırsa

$$E[A] = E[D] \implies L_{servis} = \frac{\lambda_{eff}}{\mu} = \rho_{eff} = 1 - P_0$$

serviste olması beklenen birim sayısı elde edilebilir.

Örnek 4.1. Ahmet Bey' in ayakkabı boyama ve ufak tamir işlerini yaptığı, 3 müşterinin bekleyebileceği küçük bir dükkanı vardır. Ahmet Bey gelen bir işi ortalama 4 dakikada bitirmektedir, müşteriler ise dükkana ortalama 5 dakikada bir gelmektedir.

(a) Ahmet Bey' in kendi başına kalması olasılığı nedir?

(b) Dükkandaki ortalama müşteri sayısı (saatte)

(c) Ahmet Bey, saatte ortalama kaç müşterinin geri dönmesini bekler?

(d) Bir müşterinin sistemde harcadığı ortalama zaman (dakika)

(e) Kuyrukta bekleyen ortalama müşteri sayısı (saatte)

(f) Ayakkabı boyatmaya gelen Veli Bey' in o an ayakkabısını boyatması ihtimali nedir?

Çözüm: Sistem M/M/1/N=4 sonlu kapasiteli kuyruk sistemidir. Ayakkabı dükkanına saatte ortalama 12 müşteri gelmektedir, yani $\lambda = 12$'dir. Ahmet Bey' in servis hızı ise, $\mu = 15$' tir. Buradan, trafik hızı, $\rho = \dfrac{12}{15} = \dfrac{4}{5}$ olarak hesaplanır.

(a) Ahmet Bey' in yalnız kalması olasılığı sistemde hiç müşteri olmaması olasılığına denktir:

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} = \frac{1-\frac{4}{5}}{1-\left(\frac{4}{5}\right)^5} = 0.2975 \cong 0.30$$

(b)

$$\begin{aligned} L &= \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(N+1)\,\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}} = \frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}} - \frac{5\left(\frac{4}{5}\right)^5}{1-\left(\frac{4}{5}\right)^5} = 4 - \frac{\frac{1024}{625}}{\frac{2101}{3125}} \\ &= \frac{8404-5120}{2101} = \frac{3284}{2101} = 1.56. \end{aligned}$$

(c) $\lambda P_4 = 12\rho^N \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} = 12\left(\dfrac{4}{5}\right)^4 \dfrac{1-\frac{4}{5}}{1-\left(\frac{4}{5}\right)^5} = 12\dfrac{4^4}{5^5-4^5} = 12\dfrac{256}{2101} = 1.46.$

(d) $W = \dfrac{L}{\lambda_{eff}} = \dfrac{1.56}{(1-P_4)\,\lambda} = \dfrac{1.56}{12-1.46} = 0.148\,(\times 60) = 8.88$ dakika.

(e) $L_q = L - L_{servis} = 1.56 - \rho\,(1-P_4) = 1.56 - \dfrac{\lambda_{eff}}{\mu} = 1.56 - \dfrac{10.54}{15} = 0.86.$

(f) Sistemin dolu olmaması gerekir, $P_{n\leq 3} = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1 - P_4 = 0.88$ olasılık ile Veli Bey ayakkabısını boyatabilir.