Kuyruk Teorisi Ders Notları:

Bazı Kuyruk Modelleri

Mehmet YILMAZ

mehmetyilmaz@ankara.edu.tr

10 KASIM 2017

8. HAFTA

4.7 $M/M/1/N/\infty$ sistemi için Bekleme zamanının dağılımı

T_j rastgele değişkeni j. birimin hizmet süresi olsun. Biliyoruz ki, $T_j \sim$ Üstel$\left(\frac{1}{\mu}\right)$ dir. Sistemde rastgele sayıda birim bulunmaktadır. Eğer M rastgele değişkeni sistemde bulunan birim sayısını gösterirse, $M = m$ gözlendiğinde toplam servis zamanı $S = \sum_{j=1}^{m} T_j$ rastgele değişkeni ile gösterilecektir. Bu durumda, S rastgele değişkeninin dağılımı $Gamma(\alpha = m, \beta = \frac{1}{\mu})$ olacaktır. S rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu ise

$$f_S(t) = \frac{\mu^m}{(m-1)!} t^{m-1} e^{-\mu t}, t > 0$$

şeklindedir. T_q rastgele değişkeni ise sisteme yeni giriş yapan bir birimin bekleme zamanı olsun. T_q rastgele değişkeninin dağılımını iki parçada inceleyeceğiz çünkü sıfır noktası (yani sistemde hiçbir birim yok iken bekleme yapmadan hizmet alacak) bir süreksizlik noktasıdır. $F_q(t)$ ile T_q rastgele değişkeninin dağılımı gösterilirse, $F_q(0)$ birimin serviste hiç beklememesi olasılığıdır. Öte yandan, geliş yapan bir birimin sisteme dahil olması için sistemin dolu olmaması gerekmektedir. Denge durumunda, gelen bir müşterinin sisteme dahil olmama olasılığı P_N dir. Sistemde $n(n < N)$ sayıda birim var iken geliş yapan bir birimin sisteme dahil olması olasılığı ise $\frac{P_n}{1 - P_N}$ şeklinde verilir. Buna göre, $F_q(0) = \frac{P_0}{1 - P_N}$ dır. İkinci olarak, $T_q > 0$ olduğu durum düşünülecektir. Bekleme zamanının olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_q(t)$ ile gösterilirse, toplam olasılık formülü yardımı ile

$$f_q(t) = \sum_{m=1}^{N-1} \underbrace{Pr\left(S = t | M = m\right)}_{f_S(t)} \underbrace{Pr(M = m)}_{\frac{P_m}{1 - P_N}} = \frac{1}{1 - P_N} \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\mu^m}{(m-1)!} t^{m-1} e^{-\mu t} P_m \qquad (33)$$

biçiminde elde edilir. Buradan, bekleme zamanının dağılım fonksiyonu,

$$
\begin{aligned}
F_q(t) =& F_q(0) + \int_0^t f_q(t)dt = F_q(0) + \frac{1}{1-P_N}\sum_{m=1}^{N-1} P_m \int_0^t \frac{\mu^m}{(m-1)!} t^{m-1} e^{-\mu t} dt \\
=& F_q(0) + \frac{1}{1-P_N}\sum_{m=1}^{N-1} P_m \left(1 - \int_t^\infty \frac{\mu^m}{(m-1)!} t^{m-1} e^{-\mu t} dt\right) \\
=& F_q(0) + \frac{1}{1-P_N}\sum_{m=1}^{N-1} P_m \left(1 - \sum_{r=0}^{m-1} \frac{e^{-\mu t}(\mu t)^r}{r!}\right) \\
=& \frac{P_0}{1-P_N} + \frac{1}{1-P_N}\sum_{m=1}^{N-1} P_m - \frac{e^{-\mu t}}{1-P_N}\sum_{m=1}^{N-1} P_m \sum_{r=0}^{m-1}\frac{(\mu t)^r}{r!} \\
=& \frac{P_0}{1-P_N}\sum_{m=0}^{N-1}\rho^m - \frac{P_0 e^{-\mu t}}{1-P_N}\sum_{m=1}^{N-1}\rho^m \sum_{r=0}^{m-1}\frac{(\mu t)^r}{r!} \\
=& 1 - \frac{(1-\rho)\, e^{-\mu t}}{1-\rho^N}\sum_{m=1}^{N-1}\rho^m \sum_{r=0}^{m-1}\frac{(\mu t)^r}{r!}
\end{aligned}
\tag{34}
$$

olarak elde edilir. Şimdi bu birim başına kuyrukta geçen ortalama süreyi teyit etmek için T_q rastgele değişkeninin beklenen değerini bulalım:

$$
\begin{aligned}
W_q =& E[T_q] = \int_0^\infty \left(\frac{(1-\rho)\, e^{-\mu t}}{1-\rho^N}\sum_{m=1}^{N-1}\rho^m \sum_{r=0}^{m-1}\frac{(\mu t)^r}{r!}\right) dt \\
=& \frac{1-\rho}{\mu(1-\rho^N)}\sum_{m=1}^{N-1}\rho^m \sum_{r=0}^{m-1}\underbrace{\left(\int_0^\infty \frac{e^{-\mu t}\mu^{r+1}t^r}{r!}dt\right)}_{=1} \\
=& \frac{1-\rho}{\mu(1-\rho^N)}\sum_{m=1}^{N-1} m\rho^m = \frac{1-\rho}{\mu(1-\rho^N)}\frac{\rho\left(1-\rho^N\right) - N\rho^N(1-\rho)}{(1-\rho)^2} \\
=& \frac{\lambda\left(1+\rho^N(N-1) - N\rho^{N-1}\right)}{\mu(\mu-\lambda)(1-\rho^N)}
\end{aligned}
\tag{35}
$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 4.2. (Ayakkabı dükkanı örneği devam)

(g) Yeni gelen bir müşterinin hizmet görebilmesi olasılığının en az %95 olabilmesi için kaç bekleme yerine daha ihtiyaç vardır?

(h) Bir müşterinin kuyrukta 6 dakikadan fazla beklemesi olasılığını hesaplayınız.

Çözüm: (g) Sistemde n müşteri bulunması olasılığının 0.05' ten küçük ya da eşit olması gerekir ki, yeni gelen bir müşteri %95 veya daha yüksek olasılık ile sisteme giriş yapabilsin. Ona göre,

$$P_n = \rho^n \frac{(1-\rho)}{1-\rho^{n+1}} \leq 0.05$$

$$\frac{1-\rho^{n+1}}{\rho^n (1-\rho)} \geq 20 \Rightarrow \left(\frac{1}{\rho}\right)^n \geq 20 (1-\rho) + \rho \Rightarrow n \geq \frac{\ln (20(1-\rho)+\rho)}{-\ln(\rho)}$$

$n \geq \dfrac{\ln(24) - \ln(5)}{\ln(5) - \ln(4)} = 7.03 \Rightarrow n \geq 8$ olmalıdır. Bu sonuca göre, en az 4 bekleme yerine daha ihtiyaç vardır.

(h) (34) eşitliği dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}
\Pr(T_q > 0.1) =& \frac{(1-4/5)\, e^{-15(0.1)}}{1-(4/5)^4} \sum_{m=1}^{3} (4/5)^m \sum_{r=0}^{m-1} \frac{(0.5)^r}{r!} \\
=& \frac{(1-4/5)\, e^{-15(0.1)}}{1-(4/5)^4} \left[\frac{4}{5}(1) + \left(\frac{4}{5}\right)^2 (1+1.5) + \left(\frac{4}{5}\right)^3 \left(1 + 1.5 + \frac{1.5^2}{2}\right)\right] \\
=& 0.0756[4.256] = 0.3218
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Özet olması bakımından, $M/M/1/N/\infty$ kuyruk sistemi için gerekli formülleri aşağıda verilecektir.

M/M/1/N Kuyruk Sistemi için Formüller

λ geliş hızı, gelişler arası zaman $\frac{1}{\lambda}$ ortalamalı üstel dağılım

μ servis hızı, birimlerin servis süresi $\frac{1}{\mu}$ ortalamalı üstel dağılım

n sistemde bulunan birim sayısı

N sistemin kapasitesi

ρ trafik yoğunluğu $\frac{\lambda}{\mu}$

P_0 sistemin boş kalması olasılığı $\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}$

P_n sistemde n birim olması olasılığı $\rho^n \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}$

P_N sistemin dolu olması olasılığı $\rho^N \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}$

$Pr\,(\text{sistemde en az } k \text{ birim bulunması}) = 1 - \frac{1-\rho^k}{1-\rho^{N+1}}$

L_q kuyrukta olması beklenen birim sayısı $\frac{\rho^2\left(1+\rho^N(N-1)-N\rho^{N-1}\right)}{(1-\rho^{N+1})\,(1-\rho)}$

$\lambda_{eff} = \lambda[1-P_N]$

L_{servis} serviste olması beklenen birim sayısı ρ_{eff}

L sistemde olması beklenen birim sayısı

$$L = L_q + L_{servis} = \frac{\rho}{1-\rho} + (N+1)\left[1 - \frac{1}{1-\rho^{N+1}}\right]$$

W_q kuyrukta geçen beklenen süre $\frac{L_q}{\lambda_{eff}} = \frac{\lambda\left(1+\rho^N(N-1)-N\rho^{N-1}\right)}{\mu(\mu-\lambda)\,(1-\rho^N)}$

W_{servis} serviste geçen beklenen süre $\frac{L_{servis}}{\lambda_{eff}} = \frac{1}{\mu}$

W sistemde geçen beklenen süre

$$W = W_q + W_{servis} = \frac{\mu\left(1-\rho^N\right) - N\lambda\rho^{N-1}\,(1-\rho)}{\mu(\mu-\lambda)\,(1-\rho^N)}$$

M/M/1/N Kuyruk Sistemi için Formüller (Devam)

T_q kuyrukta bekleme zamanı

$$\Pr(T_q \leq t) = 1 - \frac{(1-\rho)\, e^{-\mu t}}{1-\rho^N} \sum_{m=1}^{N-1} \rho^m \sum_{r=0}^{m-1} \frac{(\mu t)^r}{r!}$$

T sistemde geçirilen süre

Örnek 4.3. Haftanın 5 günü ve günde 8 saat açık olan bir berber dükkanını göz önüne alalım. Bu dükkana müşteriler ortalama 15 dakikada bir gelmekte olup, ortalama hizmet süresi, 12 dakikadır. Dükkanda sadece 2 bekleme koltuğu bulunmaktadır. Ortalama hizmet ücreti 20 lira olduğu düşünülürse, kuyruk modelini oluşturup, ilgili karakteristikleri belirleyiniz. Dükkana yeni bir bekleme koltuğu alındığında karakteristikleri yeniden belirleyiniz.

Çözüm: İlgilenilen sistem $M/M/1/N = 3$ kuyruk sistemidir. Haftalık ortalama gelir ve kaybı bulacak şekilde bir tablo hazırlayalım.

Karakteristikler	$N = 3$ koltuk	$N = 4$ koltuk
λ	4	4
μ	5	5
ρ	0.8	0.8
P_0	0.3388	0.2975
P_1	0.2710	0.2380
P_2	0.2168	0.1904
P_3	0.1734	0.1523
P_4	$--$	0.1218
λ_{eff}	$4[1 - P_3] = 3.3064$	3.5128
ρ_{eff}	0.6613	0.7026
Haftalık Ortalama Gelir	$8 \times 5 \times 20 \times 3.3064 = 2645.1$	2810.2
Haftalık Kaybedilen Ortalama Gider	$800 \times (4 - 3.3064) = 554.88$	389.76

*****Servis hızı arttırılırsa ne olur?*****

Örnek 4.4. Tekin Bey' in tek başına çalıştığı bir araba yıkama istasyonu vardır. Bir araç yıkanırken 2 arabalık bekleme yerinde de sıradaki araçlar bekleyebilmektedir. Saatte ortalama 6 müşteri gelmekte ve Tekin Bey ortalama 20 dakikada bir aracı temizleyip müşteriye teslim etmektedir.

(a) Tekin Beyin boş kalması olasılığı nedir?

(b) İstasyondaki ortalama müşteri sayısı (saatte) nedir?

(c) Saatte ortalama kaç müşterinin geri dönmesini beklenir?

(d) Bir müşterinin sistemde harcadığı toplam ortalama zaman (dakika)

(e) Kuyrukta bekleyen ortalama müşteri sayısı (saatte)

(f) Arabasını yıkatmaya gelen İlteriş Bey' in o an arabasını yıkatabilmesi ihtimali nedir?

Çözüm: Sistem $M/M/1/3$ tek kanallı sonlu kapasiteli kuyruk sistemdir. Geliş hızı, $\lambda = 6$, servis hızı ise saatte $\mu = 3$' tür. Buradan trafik yoğunluğu $\rho = 2$ olduğu görülür.

(a) $P_0 = \dfrac{-1}{1-2^4} = 1/15$, Tekin Bey, 60 dakikalık zaman dilimi içerisinde ortalama 4 dakika boş kalmaktadır.

(b) $L = -2 + (4)\left[1 - \frac{1}{1-2^4}\right] = 2 + 4/15 \approx 2$

(c) Öncelikle istasyonun dolu olması olasılığını hesaplamalıyız; $P_3 = 8(1/15) = 8/15$ olup, $6(8/15) \approx 3$ müşterinin geri dönmesi beklenir.

(d) $\lambda_{eff} = 6(1 - 8/15) = 14/5$ olup, $W = \frac{34/15}{14/5} = \frac{17}{21} \times (60) \approx 49$ dakikadır.

(e) $L_q = \frac{4(1 + 8(2) - 3(4))}{15} = 4/3 \approx 1$ dir.

(f) İstasyonun yeni gelen bir müşteriye servis edebilir olması gerekmektedir. $P_{n \leq 2} = 1 - P_3 = 1 - 8/15 = 7/15 = 0.4667 \approx \%47$ olasılık ile İlteriş Bey arabasını istasyonda yıkatabilir.

Örnek 4.5. $M/M/1/N$ kuyruk sisteminde, trafik hızının $\rho = 0.90$ olduğunu varsayalım. Hizmet alamayanların ortalama sayısının, hizmet alabilenlerin sayısına oranının 1 : 4' ten küçük kalabilmesi için en az kaç bekleme yerine ihtiyaç vardır? $N = 3$ için trafik hızı ρ hangi aralıkta değer almalıdır ki bu oran yine 1/4' ten küçük kalsın?

Çözüm: $\frac{\lambda - \lambda_{eff}}{\lambda_{eff}} = \frac{\lambda P_N}{\lambda[1 - P_N]} \leq \frac{1}{4}$ olması istenmektedir. Buradan, $P_N \leq \frac{1}{5}$ eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik yardımı ile $N \geq \frac{-log(5 - 4(0.90))}{log(0.90)} = 3.1935$ olarak bulunur. Bu sonuca göre $N \geq 4$ olmalıdır yani en az 3 bekleme yerine ihtiyaç vardır. Sorunun ikinci kısmı için, $5\rho^3 - 4\rho^4 - 1 = 0$ polinomunun köklerini matlab programı yardımı ile *roots([-4 5 0 0 -1])* komutunu kullanarak bulduğumuzda, $\rho \leq 0.8689$ sonucuna ulaşılır.

Örnek 4.6. Bir benzinlikte bir oto lastik değişim istasyonu ve 4 araç kapasiteli bekleme yeri bulunmaktadır. İstasyona saatte ortalama 6 araba gelmektedir. Aracın lastiklerinin ortalama takılma süresi 30 dakika sürmektedir. Poisson gelişli ve Üstel hizmet süreli bu sistem için

(a) İstasyonda ve kuyrukta olması beklenen araç sayısını bulunuz.

(b) Lastik değişim ücreti ortalama 50 lira olduğuna göre, sabah saat 8 : 00' den akşam saat 6 : 00' ya kadar çalışan servisin günlük ortalama ne kadar kazanması beklenir?

(c) Bu istasyonun günlük ortalama zararı nedir?

(d) İstasyonda bir araç sahibinin harcadığı ortalama süreyi bulunuz.

(e) İstasyon en az %95 olasılık ile çalışıyorsa, yönetici yeni bir makina daha almak istemektedir (yani hizmet kanal sayısını artırmak istemektedir). Cevabınız ne olurdu?

Çözüm: Sistem $M/M/1/5$ tek kanallı sonlu kapasiteli kuyruk sistemidir. Geliş hızı, $\lambda = 6$, servis hızı ise saatte $\mu = 2$' dir. Buradan trafik yoğunluğu $\rho = 3$ olduğu görülür.

(a) $L = -1.5 + (6)\left[1 - \dfrac{1}{1-3^6}\right] = 4.5082 \approx 5$

$$L_q = \frac{3^2\left(1 + 3^5(4) - 5(3^4)\right)}{\left(1-3^6\right)(-2)} = 3.5110 \approx 4.$$

(b) Öncelikle istasyonun dolu olması olasılığını hesaplamalıyız; $P_5 = (3^5)(0.0027) = 0.6676$ olup, buradan $\lambda_{eff} = 6(1 - .6676) = 1.9945 \approx 2$ müşterinin hizmeti alması beklenir. Günde 10 saat ve araç başına ortalama 50 lira kazanç sağlandığına göre, ortalama kazanç, $10 \times 50 \times 2 = 1000$ olarak hesaplanır.

(c) Ortalama 4 araç sistem dolu olduğu için gitmektedir. Dolayısı ile günlük ortalama zarar, $10 \times 50 \times 4 = 2000$ olarak hesaplanır.

(d) $W = \dfrac{4.5082}{1.9945} = 2.2603$ saattir.

(e) Sistemde en az bir aracın olması gerekmektedir. Buna göre, $P_{n\geq 1} = 1 - P_0 = 1 - \dfrac{-2}{1-3^6} = 0.9973$ olup, yeni bir kanal açılabilir.

Örnek 4.7. İstatistik Bölümü'nde ortak kullanıma ait tek bir yazıcı bulunmaktadır. Bu yazıcıya saatte ortalama 3 iş ulaşmaktadır. Yazıcının istenilen işi bitirme süresi ise ortalama 15 dakikadır. Yazıcıya iletilen iş talepleri arası geçen zaman süresi ile yazıcının iş bitirme süresinin üstel dağılımlı olduğu varsayımı altında;

(a) İlgili kuyruk modelini oluşturunuz.

(b) Geliş hızı ve hizmet hızı parametrelerini belirleyiniz.

(c) Trafik yoğunluğunu bulunuz.

(d) Yazıcının boş kalma olasılığını bulunuz.

(e) $n = 1, 2, 3, \ldots, 10$ için yazıcıda n iş olma olasılıklarını bulunuz.

(f) Yazıcıda olması beklenen ortalama iş sayısını bulunuz.

(g) Kuyrukta olması beklenen ortalama iş sayısını bulunuz.

(h) Sistemde olması beklenen ortalama iş sayısını bulunuz.

(i) Yazıcıda geçen ortalama iş süresini bulunuz.

(j) Kuyrukta geçen ortalama bekleme süresini bulunuz.

(k) Sistemde geçen ortalama süreyi bulunuz.

(l) Bir işin kuyrukta 20 dakikadan fazla bekleme olasılığı nedir?

(m) Yazıcı daha hızlı bir moda alınıp iş bitirme süresi ortalama 10 dakikaya indirilirse c-l de istenenler nasıl değişir? Hesaplayıp yorumlayınız.

(n) Yazıcı daha yavaş bir moda alınıp iş bitirme süresi ortalama 30 dakikaya çıkarılırsa c-l de istenenler nasıl değişir? Hesaplayıp yorumlayınız. **NOT:** Trafik yoğunluğuna dikkat ediniz.

Çözüm: (a) $M/M/1/\infty$ tek kanallı sonsuz kapasiteli kuyruk sistemidir.

(b) Geliş hızı, $\lambda = 3$, servis hızı ise saatte $\mu = 4$' tür.

(c) Trafik yoğunluğu $\rho = 0.75$.

(d) $P_0 = 1 - \rho = 0.25$.

(e)

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}
$\left(\frac{3}{4}\right)\frac{1}{4}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2\frac{1}{4}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^3\frac{1}{4}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^4\frac{1}{4}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^5\frac{1}{4}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^6\frac{1}{4}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^7\frac{1}{4}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^8\frac{1}{4}$	$\left(\frac{3^9}{4}\right)\frac{1}{4}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\frac{1}{4}$

(f) $L_{servis} = 0.75$.

(g) $L_q = \dfrac{0.75^2}{(1 - 0.75)} = 2.25 \approx 2$.

(h) $L = 2.25 + 0.75 = 3$.

(i) $W_{servis} = \dfrac{1}{4} \times (60) = 15$ dakika.

(j) $W_q = \dfrac{0.75}{4 - 3} \times (60) = 45$ dakika.

(k) $W = 45 + 15 = 60$ dakika.

(l) $\Pr\left(T_q > \dfrac{20}{60}\right) = 0.75e^{-(4-3)\frac{20}{60}} = 0.5374$.

(m) şıkkında istenilenleri aşağıdaki tablolarda verelim;

Karakteristikler	$\mu = 4$	$\mu = 6$
ρ	0.75	0.50
P_0	0.25	0.50
L_{servis}	0.75	0.50
L_q	2.25	$\dfrac{0.5^2}{(1-0.5)} = 0.50$
L	3	1
W_{servis}	15	10
W_q	45	10
W	60	20
$\Pr\left(T_q > \dfrac{20}{60}\right)$	$0.75e^{-(4-3)\frac{20}{60}} = 0.5374$	$0.5e^{-(6-3)\frac{20}{60}} = 0.1839$

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}
$\mu = 4$	0.1875	0.1406	0.1055	0.0791	0.0593	0.0445	0.0334	0.0250	0.0188	0.0141
$\mu = 6$	0.2500	0.1250	0.0625	0.0313	0.0156	0.0078	0.0039	0.0020	0.0010	0.0005

(n) $\mu = 2$ olduğunda, trafik yoğunluğu, $\rho = 1.5 > 1$ olup, sistem kararlı durumda olmamaktadır. Bu nedenle, karakteristikler sonsuz kuyruk olmaktadır.

Örnek 4.8. Yukarıdaki soruda, yazıcıya 10 iş ulaştığında daha fazla iş kabul etmeme varsayımı yapılırsa a-n de istenenleri yeniden bulunuz ve yorumlayınız.

Çözüm: (a) $M/M/1/N = 10$ tek kanallı sonlu kapasiteli kuyruk sistemidir.

(b) Geliş hızı, $\lambda = 3$, servis hızı ise saatte $\mu = 4$' tür.

(c) Trafik yoğunluğu $\rho = 0.75$.

(d) $P_0 = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{11}} = 0.2610.$

(e)

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}
0.1958	0.1468	0.1101	0.0826	0.0619	0.0465	0.0348	0.0261	0.0196	0.0147

(f) $L_{servis} = 0.75[1 - P_{10}] = 0.7390.$

(g) $L_q = \dfrac{0.75^2\,(1 + 0.75^{10}(9) - 10(0.75^9))}{(1-(0.75)^{11})(1-0.75)} = 1.7760 \approx 2.$

(h) $L = 1.776 + 0.739 = 2.5150 \approx 3.$

(i) Öncelikle, efektif geliş hızını bulmalıyız; $\lambda_{eff} = \lambda[1 - P_{10}] = 2.9559$ olarak hesaplanır.
$W_{servis} = \dfrac{0.739}{2.9559} \times (60) = 15.0005 \approx 15$ dakika.

(j) $W_q = \dfrac{1.7760}{2.9559} \times (60) = 36.0499 \approx 36$ dakika.

(k) $W = 36 + 15 = 51$ dakika.

(l) $\Pr\left(T_q > \dfrac{20}{60}\right) = \dfrac{(1-0.75)\, e^{-4/3}}{1-0.75^{10}} \sum_{m=1}^{9} 0.75^m \sum_{r=0}^{m-1} \dfrac{(4/3)^r}{r!} = 0.4899.$

(m) şıkkında istenilenleri aşağıdaki tablolarda verelim;

Karakteristikler	$\mu = 4$	$\mu = 6$
ρ	0.75	0.50
P_0	0.2610	0.5002
L_{servis}	0.7390	$0.50[1 - 0.5^{10}(0.5002)] = 0.4998$
L_q	1.776	$\dfrac{0.5^2\,(1 + (9)0.5^{10} - 10(0.5^9))}{(1 - (0.5)^{11})(1 - 0.5)} = 0.4949$
L	2.515	0.9947
W_{servis}	15	10
W_q	36	$0.1650 \times (60) = 9.9028 \approx 10$
W	51	20
$\Pr\left(T_q > \dfrac{20}{60}\right)$	0.4899	0.1821

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}
$\mu = 6$	0.2501	0.1250	0.0625	0.0313	0.0156	0.0078	0.0039	0.0020	0.0010	0.0005

(n) $\mu = 2$ olduğunda, trafik yoğunluğu, $\rho = 1.5 > 1$ dir. Kapasite sonlu olduğundan modelin karakteristiklerini elde etmek mümkündür:

Karakteristikler	Formuller	$\mu = 2$
ρ	$\dfrac{\lambda}{\mu}$	1.50
P_0	$\dfrac{1-\rho}{1-\rho^{10+1}}$	0.0058
P_{10}	$\rho^{10} P_0$	0.3345
λ_{eff}	$\lambda[1 - P_{10}]$	1.0034
ρ_{eff}	$\dfrac{\lambda[1 - P_{10}]}{\mu}$	0.5017
L_{servis}	ρ_{eff}	0.5017
L_q	$\dfrac{\rho^2 \left(1 + (9)\rho^{10} - 10\rho^9\right)}{(1-\rho^{11})(1-\rho)}$	7.1345
L	$L_q + L_{servis}$	7.6362
W_{servis}	$\dfrac{1}{\mu}$	30
W_q	$\dfrac{L_q}{\lambda_{eff}}$	$7.1108 \times (60) = 426.645$
W	$W_q + W_{servis}$	456.645
$\Pr\left(T_q > \dfrac{20}{60}\right)$	$\dfrac{(1-1.5)\, e^{-2/3}}{1-1.5^{10}} \sum_{m=1}^{9} 1.5^m \sum_{r=0}^{m-1} \dfrac{(2/3)^r}{r!}$	0.6372

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9
$\mu = 2$	0.0087	0.0130	0.0196	0.0294	0.0440	0.0661	0.0991	0.1486	0.2230

Örnek 4.9. Konuşmayı çok seven küçük bir mahalle bakkalına sahip İsmet Bey'in ortalama hizmet süresi 4 dakikadır. Müşteriler ortalama 5 dakika ara ile bakkala gelmektedirler. Bakkal 4 kişilik bir yere sahiptir ve bakkalın dolu olduğunu gören bir müşteri ihtiyaçlarını başka bir yerden karşılamaktadır. Buna göre,

(a) İsmet Bey 1 saatlik zaman dilimi içerisinde ortalama kaç dakika yalnız kalır?

(b) Ortalama müşteri sayısı nedir?

(c) Ortalama hizmet alamadan geri dönen müşteri sayısı nedir?

(d) Bakkalda bir müşterinin ortalama harcadığı süre kaç dakikadır?

Çözüm: Model, $M/M/1/N = 4$ tek kanallı sonlu kapasiteli kuyruk sistemidir. Geliş hızı, $\lambda = 12$, servis hızı ise saatte $\mu = 15$' tir. Trafik yoğunluğu $\rho = 0.8$ olarak hesaplanır.

(a) İsmet Bey' in herhangi 1 saatlik zaman dilimi içerisinde boş kalması olasılığı, $P_0 = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^5} = 0.2975$ olup, $0.2975 \times (60) = 17.8486 \approx 18$ dakika yalnız kalmaktadır.

(b) $L = P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 = 0.2975(0.8 + 2(0.8^2) + 3(0.8^3) + 4(0.8^4)) = 1.5632.$

(c) $\lambda P_4 = 12(0.2975(0.8)^4) = 1.4623.$

(d) $W = \dfrac{L}{\lambda_{eff}} = \dfrac{1.5632}{12 - 1.4623} = 0.1483 \times (60) = 8.9006 \approx 9$ dakikadır.