Kuyruk Teorisi Ders Notları:

Bazı Kuyruk Modelleri

Mehmet YILMAZ

mehmetyilmaz@ankara.edu.tr

10 KASIM 2017

9. HAFTA

5 Çok kanallı, sonsuz kapasiteli, kuyruk sistemi $M/M/K/\infty/\infty$

Birimlerin sisteme gelişleri arasındaki geçen sürenin $1/\lambda$ ortalamalı, birimlerin hizmet sürelerinin ise $1/\mu$ ortalamalı üstel dağılıma sahip olduğu düşünülmektedir. Bu kuyruk sisteminde birden fazla servis kanalı olup, özdeş görevi paylaşmaktadırlar. Kapasitenin sonsuz, birimlerin kaynağının da sonsuz olduğu düşünülmektedir.

Denklem (7) kullanılarak sistemde n birim olması olayı aşağıdaki 3 durum ile açıklanabilir:

1 Sistemde $n = 0$ birim varken,

$$0 = -\lambda P_0 + \mu P_1 \tag{36}$$

2 Sistemde $n = 1, 2, ..., K-1$ birim varken,

$$0 = -(\lambda + n\mu)P_n + (n+1)\mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1} \tag{37}$$

Sistemdeki birim sayısı kanal sayısından küçük olduğundan birimler kanallardan ortalama olarak benzer sürelerde çıkış yapacağından, μ yerine $n\mu$ alınmıştır.

3 Sistemde $n \geq K$ birim varken,

$$0 = -(\lambda + K\mu)P_n + K\mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1} \tag{38}$$

Denklem (36) dikkate alınırsa,

$$\mu P_1 = \lambda P_0 \implies P_1 = \rho P_0 \tag{39}$$

elde edilir. Bu sonuç ile birlikte, denklem (37), $n = 1$ için dikkate alınırsa,

$$-(\lambda + \mu)P_1 + 2\mu P_2 + \lambda P_0 = 0 \implies 2\mu P_2 = \lambda P_1 \implies P_2 = \frac{\rho^2}{2} P_0 \tag{40}$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç ile birlikte, denklem (37), $n = 2$ için dikkate alınırsa,

$$-(\lambda + 2\mu)P_2 + 3\mu P_3 + \lambda P_1 = 0 \implies 3\mu P_3 = \lambda P_2 \implies P_3 = \frac{\rho^3}{3!} P_0 \tag{41}$$

sonucu elde edilir. Bu şekilde yinelemeler yapıldığında, $n = K - 1$ için, denklem (37)' den

$$\begin{aligned} -\lambda P_{K-1} + (K-1)\mu P_{K-1} + K\mu P_K + \lambda P_{K-2} = 0 \\ \implies K\mu P_K = \lambda P_{K-1} \implies P_K = \frac{\rho^K}{K!} P_0 \end{aligned} \tag{42}$$

ifadesine ulaşılır. Diğer yandan, $n = K$ için denklem (38)' den şu sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned} -\lambda P_K - \underbrace{K\mu P_K}_{\lambda P_{K-1}} + K\mu P_{K+1} + \lambda P_{K-1} = 0 \\ \implies K\mu P_{K+1} = \lambda P_K \implies P_{K+1} = \frac{\rho}{K} P_K \end{aligned} \tag{43}$$

Bu sonuç, $n = K + 1$ için denklem (38)' de yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} -\lambda P_{K+1} - K\mu P_{K+1} + K\mu P_{K+2} + \lambda P_K = 0 \\ \implies K\mu P_{K+2} = \lambda P_{K+1} \implies P_{K+2} = \frac{\rho}{K} P_{K+1} = \frac{\rho^2}{K^2} P_K \end{aligned} \tag{44}$$

eşitliğine ulaşılır. İşlemler bu şekilde yinelenirse, $n = K + s$ için

$$P_{K+s} = \frac{\rho}{K} P_{K+s-1} = \frac{\rho^s}{K^s} P_K \tag{45}$$

eşitliği elde edilir. Bu sonuç, denklem (42) ile birleştirilirse, $s \geq 0$ için

$$P_{K+s} = \frac{\rho^{K+s}}{K^s} \frac{P_0}{K!} \tag{46}$$

eşitliğine ulaşılır. $K + s = n$ olduğu için, denklem (46)' da gerekli düzenlemeler yapılırsa, $n = K, K+1, ...$ için

$$P_n = \frac{\rho^n}{K^{n-K}} \frac{P_0}{K!} \tag{47}$$

eşitliği yazılabilir. Öte yandan, (39)-(42) denklemleri dikkate alındığında, $n = 0, 1, ..., K - 1$ için

$$P_n = \frac{\rho^n}{n!} P_0 \tag{48}$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda, sistemde n birim bulunması olasılığı,

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{\rho^n}{n!} P_0 & , \quad n = 0, 1, 2, ..., K - 1 \\[2ex] \dfrac{\rho^n}{K^{n-K}} \dfrac{P_0}{K!} & , \quad n = K, K+1, K+2, ... \end{cases} \tag{49}$$

biçiminde parçalı olarak verilir.

Mümkün olaylar üzerinden olasılıkların toplamı 1 değerini vermelidir, yani $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$

olmalıdır. Buradan P_0 için bir eşitlik elde edilebilir. Ona göre, $\dfrac{\rho}{K} < 1$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{K-1} P_n + \sum_{n=K}^{\infty} P_n = P_0 \left[\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^K}{K!} \sum_{n=K}^{\infty} \frac{\rho^{n-K}}{K^{n-K}} \right] \\
= P_0 \left[\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^K}{K!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{K^n} \right] = P_0 \left[\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^K}{K!} \frac{1}{1-\dfrac{\rho}{K}} \right] = 1 \\
\Longrightarrow P_0 = \left[\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^K}{(K-1)!} \frac{1}{K-\rho} \right]^{-1}
\end{aligned} \tag{50}$$

biçiminde ifade edilir. Artık, $M/M/K/\infty/\infty$ sisteminin karakteristiklerini bulabiliriz.

5.1 $M/M/K/\infty/\infty$ sistemi için kuyrukta olması beklenen birim sayısı

Bu sistemde kuyruk oluşabilmesi için bir birimin hizmet alırken, sisteme giriş yapan birimlerin belirli bir düzenek ile dizilmeleri gerekir yani $n > K$ durumunda sistemde kuyruk oluşur. Buna göre,

$$\begin{aligned}
L_q = \sum_{n=K+1}^{\infty} (n-K) P_n = \frac{P_0 \rho^K}{K!} \sum_{n=K+1}^{\infty} (n-K) \left(\frac{\rho}{K} \right)^{n-K} = \frac{P_0 \rho^K}{K!} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{\rho}{K} \right)^{n+1} \\
= \frac{P_0 \rho^{K+1}}{K!K} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{\rho}{K} \right)^{n} = \frac{P_0 \rho^{K+1}}{K!K} \left(\frac{d \sum_{n=0}^{\infty} r^{n+1}}{dr} \right) \Bigg|_{r=\frac{\rho}{K}} = \frac{P_0 \rho^{K+1}}{K!K} \frac{d\left(\dfrac{r}{1-r} \right)}{dr} \Bigg|_{r=\frac{\rho}{K}} \\
= \frac{P_0 \rho^{K+1}}{(K-\rho)^2 (K-1)!}
\end{aligned} \tag{51}$$

eşitliği elde edilir.

5.2 $M/M/K/\infty/\infty$ sistemi için serviste olması beklenen birim sayısı

Bu sistemde, $n = 1, 2, ...K$ için hep n birim hizmet görürken, $n > K$ durumunda sistemde hep K birim hizmet görüyor olacaktır. Buna göre,

$$
\begin{aligned}
L_{servis} &= \sum_{n=1}^{K} nP_n + \sum_{n=K+1}^{\infty} KP_n = P_0 \sum_{n=1}^{K} n\frac{\rho^n}{n!} + KP_0\frac{\rho^K}{K!} \sum_{n=K+1}^{\infty} \frac{\rho^{n-K}}{K^{n-K}} \\
&= P_0\rho \sum_{n=1}^{K} \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} + KP_0\frac{\rho^K}{K!} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{K}\right)^{n+1} \\
&= P_0\rho \sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + P_0\frac{\rho^K}{(K-1)!}\left(\frac{\rho}{(K-\rho)}\right) \\
&= \rho P_0 \underbrace{\left[\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^K}{(K-1)!(K-\rho)}\right]}_{1/P_0} = \rho
\end{aligned}
\tag{52}
$$

eşitliği ile elde edilir.

5.3 $M/M/K/\infty/\infty$ sistemi için sistemde olması beklenen birim sayısı

Bu sistemde $n = 0, 1, 2, ...$ durumu göz önüne alınarak bir beklenen değer bulunacaktır.

$$\begin{aligned}
L =& \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \sum_{n=0}^{K} nP_n + \sum_{n=K+1}^{\infty} nP_n = P_0 \left[\sum_{n=1}^{K} n\frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^K}{K!} \sum_{n=K+1}^{\infty} n\frac{\rho^{n-K}}{K^{n-K}} \right] \\
=& \rho P_0 \left[\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{K-1}}{K!} \sum_{n=0}^{\infty} (n+K+1) \left(\frac{\rho}{K}\right)^{n+1} \right] \\
=& \rho P_0 \left[\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^K}{(K)K!} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{\rho}{K}\right)^{n} + \frac{\rho^{K-1}}{K!} \sum_{n=0}^{\infty} K \left(\frac{\rho}{K}\right)^{n+1} \right] \\
=& \rho P_0 \left[\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^K}{(K)K!} \left(\frac{d\sum_{n=0}^{\infty} r^{n+1}}{dr} \right) \Bigg|_{r=\frac{\rho}{K}} + \frac{\rho^{K-1}}{(K-1)!} \left(\frac{\rho}{K-\rho} \right) \right] \\
=& \rho P_0 \left[\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^K}{(K)K!} \frac{d\left(\frac{r}{1-r}\right)}{dr} \Bigg|_{r=\frac{\rho}{K}} + \frac{\rho^K}{(K-\rho)(K-1)!} \right] \\
=& \rho P_0 \left[\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^K}{(K)K!} \frac{1}{(1-r)^2} + \frac{\rho^K}{(K-\rho)(K-1)!} \right] \\
=& \rho P_0 \left[\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^K}{(K-\rho)^2(K-1)!} + \frac{\rho^K}{(K-\rho)(K-1)!} \right] \\
=& \underbrace{\rho\, P_0 \left[\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^K}{(K-\rho)(K-1)!} \right]}_{=1} + \frac{P_0 \rho^{K+1}}{(K-\rho)^2(K-1)!} \\
=& \rho + \frac{P_0 \rho^{K+1}}{(K-\rho)^2(K-1)!}
\end{aligned} \tag{53}$$

Aynı sonuca, kuyrukta olması beklenen birim sayısı ile serviste olması beklenen birim sayısının toplamını elde ederek ulaşabiliriz:

$$L = L_q + L_{servis} \implies L = \frac{P_0 \rho^{K+1}}{(K-\rho)^2(K-1)!} + \rho$$

5.4 $M/M/K/\infty/\infty$ sistemi için birim başına kuyrukta geçen beklenen süre

Little kanunu, kararlı bir sistemde kuyrukta veya sistemde olan ortalama birim sayısı ile kuyrukta veya sistemde birim başına beklenen süre arasında bir ilişki olduğunu söyler. Bu ilişki şöyle tanımlanır:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{P_0 \rho^{K+1}}{\lambda (K-\rho)^2 (K-1)!} \tag{54}$$

5.5 $M/M/K/\infty/\infty$ sistemi için birim başına serviste geçen beklenen süre

Little kanununa göre, birim başına serviste geçen ortalama süre

$$W_{servis} = \frac{L_{servis}}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda} = \frac{1}{\mu} \tag{55}$$

5.6 $M/M/K/\infty/\infty$ sistemi için birim başına sistemde geçen beklenen süre

Benzer biçimde, Little kanunlarına göre birim başına sistemde geçen ortalama süre

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{P_0 \rho^{K+1}}{\lambda (K-\rho)^2 (K-1)!} + \frac{1}{\mu} \tag{56}$$

Öte yandan, $L = L_q + L_{servis}$ olduğu hatırlanırsa, $W = W_q + W_{servis}$ eşitliği elde edilir.

Şimdi kararlı sistemler için $(0, t]$ gibi bir zaman aralığında, sisteme giriş yapan ortalama birim sayısı ile sistemden hizmet alıp çıkış yapan ortalama birim sayısının dengede olduğu bilinmektedir (doğum-ölüm süreçleri gibi). A rastgele değişkeni ile sisteme $(0,t]$ zaman aralığında giriş yapan birimlerin sayısını, D rastgele değişkeni ile sistemden $(0,t]$ zaman aralığında hizmet alıp çıkan birimlerin sayısını gösterelim. Bu durumda,

$$E[A] = \lambda t \underbrace{[P_0 + P_1 + P_2 + ... + P_n + P_{n+1} + ...]}_{=1}$$

ve

$$E[D] = \mu t \underbrace{[1P_1 + 2P_2 + 3P_3 + ... + KP_K + KP_{K+1} + KP_{K+2} ...]}_{=L_{servis}}$$

biçiminde elde edilirler. Denge durumu göz önüe alınırsa

$$E[A] = E[D] \implies L_{servis} = \frac{\lambda}{\mu}$$

serviste olması beklenen birim sayısı elde edilebilir.

Örnek 5.1. İki pisti olan bir hava alanına saatte 5 uçak iniş yapmaktadır. Herhangi bir uçağın kalkış için hazırlanması ortalama 15 dakika, hava alanından ayrılması ise ortalama 5 dakika sürmektedir. Buna göre,

(a) Servis hızını,

(b) Trafik yoğunluğunu,

(c) Bir saatlik zaman dilimi içerisinde, kalkış yapmayı bekleyen ortalama uçak sayısını,

(d) Bir uçağın kalkış için beklediği ortalama süreyi (dakika cinsinden),

(e) Bir uçağın kalkış için sıra bekletilmemesi olasılığını,

bulunuz.

Çözüm: (a) Sistem, $M/M/2/\infty$ modelidir. Herhangi bir uçağın pistten ayrılma süresi ortalama $15+5=20$ dakikadır. Dolayısı ile havaalanı saatte 3 uçağa hizmet verebiliyor yani $\mu=3$ olarak bulunur.

(b) $\lambda=5$ olup, $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}=\dfrac{5}{3}$ hava alanı sistemi için trafik yoğunluğur.

(c) Öncelikle P_0 olasılığını hesaplamalıyız.

$$P_0=\frac{1}{\sum_{n=0}^{K-1}\dfrac{\rho^n}{n!}+\dfrac{\rho^K}{(K-\rho)(K-1)!}}=\frac{1}{(1+5/3)+\dfrac{(5/3)^2}{(2-5/3)}}=\frac{1}{11}$$

Buradan, kuyrukta olması beklenen uçak sayısı,

$$L_q=\frac{P_0\rho^{K+1}}{(K-\rho)^2(K-1)!}=\frac{(1/11)(5/3)^3}{(2-(5/3))^2}=\frac{125}{33}=3.7879\cong 4$$

olarak hesaplanır (herhangi bir bir saatlik zaman dilimi içersinde).

(d) $W_q=\dfrac{L_q}{\lambda}=\dfrac{3.7879}{5}=0.7576\times 60=45.4545\cong 46$ dakika olarak bulunur.

(e) Sistemde bulunan uçak sayısının pist sayısından az olması gerekir, yani $n<2$ olması olasılığını hesaplamamız gerekir.

$$P_{n<2}=P_0+P_1=\frac{1}{11}\left(1+\frac{5}{3}\right)=\frac{8}{33}=0.2424$$