Kuyruk Teorisi Ders Notları:

Bazı Kuyruk Modelleri

Mehmet YILMAZ

mehmetyilmaz@ankara.edu.tr

10 KASIM 2017

10. HAFTA

5.7 $M/M/K/\infty/\infty$ sistemi için Bekleme süresinin dağılımı

T_j rastgele değişkeni j. birimin hizmet süresi olsun. Biliyoruz ki, $T_j \sim \text{Üstel}\left(\frac{1}{\mu}\right)$ dir. Yeni gelen bir birimin bekletilmesi için sistemde bulunan birim sayısının $n \geq K$ olması gerekmektedir. Bu durumda, yeni gelen birim en fazla $n-K+1$ birimin hizmet görmesini bekleyecektir. Sistemde rastgele sayıda birim olduğuna göre, N rastgele değişkeni sistemde bulunan birim sayısını gösterirse, $N = n$ $(n \geq K)$ gözlendiğinde toplam servis zamanı $S = \sum_{j=1}^{n-K+1} T_j$ rastgele değişkeni ile gösterilecektir. Bu durumda, S rastgele değişkeninin dağılımı $Gamma(\alpha = n-K+1, \beta = \frac{1}{K\mu})$ olacaktır. S rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu ise

$$f_S(t) = \frac{(K\mu)^{n-K+1}}{(n-K)!} t^{n-K} e^{-K\mu t}, t > 0$$

şeklindedir. T_q rastgele değişkeni ise sisteme yeni giriş yapan bir birimin bekleme zamanı olsun. T_q rastgele değişkeninin dağılımını iki parçada inceleyeceğiz çünkü sıfır noktası (yani sistemde kanal sayısından az birim var iken bekleme yapmadan hizmet alacak) bir süreksizlik noktasıdır. $F_q(t)$ ile T_q rastgele değişkeninin dağılımı gösterilirse, $F_q(0)$ birimin serviste hiç beklememesi olasılığıdır. Bu olasılık $F_q(0) = P_{n<K} = \sum_{n=0}^{K-1} P_n$ dir. İkinci olarak, $T_q > 0$ olduğu durum düşünülecektir. Bekleme zamanının olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_q(t)$ ile gösterilirse, toplam olasılık formülü yardımı ile

$$\begin{aligned}
f_q(t) &= \sum_{n=K}^{\infty} \underbrace{Pr\left(S=t|N=n\right)}_{f_S(t)} \underbrace{Pr(N=n)}_{P_n} = \sum_{n=K}^{\infty} \frac{(K\mu)^{n-K+1}}{(n-K)!} t^{n-K} e^{-K\mu t} \frac{P_0 \rho^n}{K! K^{n-K}} \\
&= P_0 e^{-K\mu t} \frac{\rho^K}{(K-1)!} \mu \sum_{n=K}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-K}}{(n-K)!} = P_0 e^{-K\mu t} \frac{\rho^K}{(K-1)!} \mu \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{(n)!}}_{=e^{\lambda t}} \\
&= \underbrace{P_0 \frac{\rho^K}{(K-1)!}}_{=KP_K} \mu e^{-\mu t(K-\rho)} = K P_K \mu e^{-\mu t(K-\rho)}
\end{aligned} \tag{57}$$

biçiminde elde edilir. Buradan, bekleme zamanının dağılım fonksiyonunu,

$$\begin{aligned}
F_q(t) =& F_q(0) + K P_K \mu \int_0^t e^{-\mu t(K-\rho)} dt = \sum_{n=0}^{K-1} P_n + K P_K \mu \frac{1-e^{-\mu t(K-\rho)}}{\mu(K-\rho)} \\
=& 1 - \sum_{n=K}^{\infty} P_n + K P_K \frac{1-e^{-\mu t(K-\rho)}}{(K-\rho)} \\
=& 1 - \sum_{n=K}^{\infty} \frac{P_0 \rho^n}{K! K^{n-K}} + K P_K \frac{1-e^{-\mu t(K-\rho)}}{(K-\rho)} \\
=& 1 - \frac{P_0 \rho^K}{K!} \sum_{n=K}^{\infty} \frac{\rho^{n-K}}{K^{n-K}} + K P_K \frac{1-e^{-\mu t(K-\rho)}}{(K-\rho)} \\
=& 1 - \frac{P_0 \rho^K}{K!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{K^n} + K P_K \frac{1-e^{-\mu t(K-\rho)}}{(K-\rho)} \\
=& 1 - \frac{P_0 \rho^K}{(K-\rho)(K-1)!} + K P_K \frac{1-e^{-\mu t(K-\rho)}}{(K-\rho)} \\
=& 1 - \frac{K P_K}{(K-\rho)} + K P_K \frac{1-e^{-\mu t(K-\rho)}}{(K-\rho)} = 1 - \frac{K P_K}{(K-\rho)} e^{-\mu t(K-\rho)}
\end{aligned} \tag{58}$$

olarak elde edilir. Şimdi bu birim başına kuyrukta geçen ortalama süreyi teyit etmek için T_q rastgele değişkeninin beklenen değerini bulalım:

$$\begin{aligned}
W_q =& E[T_q] = \int_0^{\infty} (1 - F_q(t)) dt = \frac{K P_K}{(K-\rho)} \int_0^{\infty} e^{-\mu t(K-\rho)} dt = \frac{K P_K}{\mu (K-\rho)^2} \\
=& \frac{K P_0 \rho^K}{K! \mu (K-\rho)^2} = \frac{P_0 \rho^{K+1}}{\lambda (K-1)! (K-\rho)^2}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 5.2. (İki pistli Havalanı örneği devam)

(f) en az bir pistin dolu olması olasılığını

(g) uçağın kalkış için 5 dakikadan fazla beklemesi olasılığını

(h) kalkış için sırada en az iki uçağın beklemesi olasılığını

bulunuz.

Çözüm: (f) $P_{n>0} = 1 - P_0 = 1 - \dfrac{1}{11} = 0.9091 \cong 0.91$

(g) $Pr\left(T_q > \dfrac{5}{60}\right) = \dfrac{2P_2}{(2-5/3)} e^{-3t(2-5/3)} = \dfrac{2\dfrac{(1/11)(5/3)^2}{2}}{(2-5/3)} e^{-1/12} = 0.6970$

(h) Her iki pistin de dolu olması ve en az 2 uçağın da bekliyor olması gerekmektedir. $P_{n\geq 4} = 1 - [P_0 + P_1 + P_2 + P_3] = 1 - \dfrac{1}{11}\left[1 + \dfrac{5}{3} + \dfrac{25}{18} + \dfrac{125}{108}\right] = 0.5261.$

Örnek 5.3. Bir havaalanına saatte 27 uçak iniş yapmaktadır. Uçakların servis zamanı 2 dakika ortalamalı üstel dağılıma uymaktadır. Bir uçağın beklemesi olasılığının 0.1 i geçmemesi için kaç pist gereklidir?

Çözüm: Sistem M/M/k çok kanallı sonsuz kaynaklı sistemdir.

$$\lambda = 27$$

$$\mu = 30$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{27}{30} = \frac{9}{10}$$

Bir müşterinin beklemesi olasılığı sistemde en az K kişinin olmasına denktir. Bu olasılığı bulmak için aşağıdaki formülden yararlanacağız:

$$\begin{aligned}
P_{n\geq K} = \sum_{n=K}^{\infty} P_n = P_0 \sum_{n=K}^{\infty} \frac{\rho^n}{K!K^{n-K}} = P_0 \frac{\rho^K}{K!} \sum_{n=K}^{\infty} \left(\frac{\rho}{K}\right)^{n-K} \\
= P_0 \frac{\rho^K}{K!} \frac{1}{1-\frac{\rho}{K}} = P_0 \frac{\rho^K}{(K-1)!} \frac{1}{(K-\rho)} \\
= \frac{\frac{\rho^K}{(K-1)!} \frac{1}{(K-\rho)}}{\sum\limits_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^K}{(K-1)!(K-\rho)}} = \left[\frac{\sum\limits_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!}}{\frac{\rho^K}{(K-1)!(K-\rho)}} + 1 \right]^{-1}
\end{aligned}$$

$K = 2$ için

$$P_{n\geq 2} = \left[\frac{1+\rho}{\frac{\rho^2}{(2-1)!(2-\rho)}} + 1 \right]^{-1} = \frac{\rho^2}{3} = \frac{\frac{81}{100}}{3} = 0.27$$

0.1 değerini geçtiği için k=3 alınır;

$K = 3$ için

$$P_{n\geq 3} = \left[\frac{1+\rho+\frac{\rho^2}{2}}{\frac{\rho^3}{(3-1)!(3-\rho)}} + 1 \right]^{-1} = \left[\frac{1+\frac{9}{10}+\frac{81}{200}}{\frac{\frac{9^3}{1000}}{2\left(3-\frac{9}{10}\right)}} + 1 \right]^{-1} = \left[\frac{42\,(190+81/2)}{9^3} + 1 \right]^{-1} = 0.070029$$

$K = 3$ için 0.1 in altında kaldığından 3 pist yeterlidir.

Örnek 5.4. Bir iş merkezinde 4 kişilik 2 asansör aynı katlara hizmet vermektedir. Saatte ortalama 120 müşteri asansörleri kullanmak için gelmektedirler. Asansörün her birinin hizmeti tamamlayıp zemin kata tekrar inmesi 3 dakika sürmektedir. Buna göre,

(a) Asansörlerin her ikisinin de boş kalması olasılığını hesaplayınız.

(b) Kuyrukta bekleyen ortalama müşteri sayısını bulunuz.

(c) Bir müşterinin kuyrukta harcadığı zamanı dakika cinsinden hesaplayınız.

(d) Servisteki ortalama müşteri sayısını bulunuz.

(e) Sıra bekleyen 4 kişilik grubun kuyrukta 5 dakikadan fazla beklemesi olasılığını hesaplayınız.

(f) Tam olarak bir asansörün boş kalması olasılığını hesaplayınız.

Çözüm: $M/M/2$ sonsuz kapasiteli servis sistemidir. Ona göre,

$$\lambda = 30$$

$$\mu = 20$$

olup, trafik yoğunluğu $\rho = \dfrac{3}{2}$ şeklinde hesaplanır.

(a) $P_0 = \left[1 + \rho + \dfrac{\rho^2}{(2-1)!\,(2-\rho)}\right]^{-1} = \left[1 + \dfrac{3}{2} + \dfrac{9}{2}\right]^{-1} = \dfrac{1}{7}$

(b) $L_q = P_0 \dfrac{\rho^{k+1}}{(k-1)!(k-\rho)^2} = \dfrac{1}{7}\left[\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{\frac{1}{4}}\right] = \dfrac{27}{14} = 1.93 \cong 2(\times 4) = 8$ kişi

(c) $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda} = \dfrac{2}{30}(\times 60) = 4$ dakika

(d) $W_{servis} = W_q + 3 = 7$

$L_{servis} = \lambda W_{servis} = \dfrac{1}{2}7 = 3.5$ kişi veya 1 grup

(e) $\Pr\left(T_q > \dfrac{5}{60}\right) = (1 - P_0 - P_1)\, e^{-(2\mu-\lambda)\frac{1}{12}} = \left(1 - \dfrac{1}{7} - \dfrac{3}{14}\right) e^{-(40-30)\frac{1}{12}} = \dfrac{9}{14} e^{-\frac{5}{6}} =$ 0.28

(f) Tam olarak bir asansörün boş kalması demek sistemde bulunan 4 kişilik müşteri grubundan 1 tane olmasına denktir. Bu olasılık ise, $\dfrac{3}{14}$ tür.

Örnek 5.5. Bir marketin manav reyonuna saatte ortalama 30 müşteri uğramaktadır. Müşterilerin aldıkları malları tarttırmak için geçen servis zamanı 3 dakika ortalamalı üstel dağılıma uymaktadır. Herhnagi bir müşterinin beklemesi olasılığının 0.1 i geçmemesi için kaç tartı daha gereklidir?

Çözüm: M/M/K sonsuz kapasiteli servis sistemidir. Ona göre, $\lambda = 30$ ve $\mu = 20$ olup, $\rho = 3/2$ dir. Herhangi bir müşterinin beklemesi olasılığı sistemdeki müşteri sayısının en az kanal sayısı kadar olması gerekmektedir.

$K = 2$ için

Öncelikle P_0 olasılığını hesaplamalıyız.

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{K-1} \dfrac{\rho^n}{n!} + \dfrac{\rho^K}{(K-\rho)(K-1)!}} = \frac{1}{(1+3/2) + \dfrac{(3/2)^2}{(2-3/2)}} = \frac{1}{7}$$

$$P_{n\geq 2} = 1 - P_0 - P_1 = 1 - \frac{1}{7}(1 + (3/2)) = \frac{11}{14}$$

Bu olasılık 0.1' den büyük olduğu için tartı sayısını 1 artırıp yeniden hesaplamalar yapılır:

$K = 3$ için

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^K}{(K-\rho)(K-1)!}} = \frac{1}{(1 + (3/2) + (9/8) + \frac{(3/2)^3}{2(3-3/2)}} = \frac{4}{19}$$

$$P_{n\geq 3} = 1 - P_0 - P_1 - P_2 = 1 - \frac{4}{19}(1 + 3/2 + 9/8) = \frac{9}{38}$$

Bu olasılık 0.1' den büyük olduğu için tartı sayısını 1 artırıp yeniden hesaplamalar yapılır:

$K = 4$ için

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^K}{(K-\rho)(K-1)!}} = \frac{1}{(1 + (3/2) + (9/8) + (9/16) + \frac{(3/2)^4}{6(4-3/2)}} = \frac{40}{181}$$

$$P_{n\geq 3} = 1 - P_0 - P_1 - P_2 = 1 - \frac{40}{181}(1 + 3/2 + 9/8 + (9/16)) = \frac{27}{362} = 0.0746$$

Bu olasılık 0.1' den küçük olduğu için 3 tartı daha alınmalıdır.

Özet olması bakımından, $M/M/K/\infty/\infty$ kuyruk sistemi için gerekli formülleri aşağıda verilecektir.

M/M/K/∞ Kuyruk Sistemi için Formüller

λ geliş hızı, gelişler arası zaman $\dfrac{1}{\lambda}$ ortalamalı üstel dağılım

μ servis hızı, birimlerin servis süresi $\dfrac{1}{\mu}$ ortalamalı üstel dağılım

n sistemde bulunan birim sayısı

ρ trafik yoğunluğu $\dfrac{\lambda}{\mu}$

K sistemdeki servis kanalı sayısı bulunan birim sayısı, $\dfrac{\rho}{K} < 1$

P_0 sistemin boş kalması olasılığı $P_0 = \dfrac{1}{\sum_{n=0}^{K-1} \dfrac{\rho^n}{n!} + \dfrac{\rho^K}{(K-\rho)(K-1)!}}$

P_n sistemde n birim olması olasılığı $P_n = \dfrac{\rho^n}{n!} P_0 \qquad n = 0, 1, 2, ..., K-1$

$P_n = \dfrac{\rho^n}{K^{n-K}} \dfrac{P_0}{K!} \qquad n = K, K+1, K+2, ...$

$\Pr\left(\text{sistemde en az } K \text{ birim bulunması}\right) = \dfrac{K P_K}{(K-\rho)}$

L_q kuyrukta olması beklenen birim sayısı $\dfrac{P_0 \rho^{K+1}}{(K-\rho)^2 (K-1)!}$

L_{servis} serviste olması beklenen birim sayısı ρ

L sistemde olması beklenen birim sayısı

$$L = L_q + L_{servis} = \frac{P_0 \rho^{K+1}}{(K-\rho)^2 (K-1)!} + \rho$$

W_q kuyrukta geçen beklenen süre $\dfrac{L_q}{\lambda} = \dfrac{P_0 \rho^K}{\mu (K-\rho)^2 (K-1)!}$

M/M/K/∞ Kuyruk Sistemi için Formüller (devam)

W_{servis} serviste geçen beklenen süre $\dfrac{1}{\mu}$

W sistemde geçen beklenen süre

$$W = W_q + W_{servis} = \frac{P_0 \rho^K}{\mu(K-\rho)^2 (K-1)!} + \frac{1}{\mu}$$

T_q kuyrukta bekleme zamanı

$$\Pr\left(T_q \leq t\right) = 1 - \frac{K P_K}{(K-\rho)} e^{-\mu t (K-\rho)}$$

Örnek 5.6. Bir polikliniğe saatte ortalama 4 hasta gelmektedir. Bu poliklinikte 3 doktor bulunmakta olup, bir doktorun ortalama muayene süresi 15 dakikadır. Buna göre,

(a) Kuyrukta bekleyen ortalama hasta sayısını bulunuz.

(b) Poliklinikteki saatlik ortalama hasta sayısını bulunuz.

(c) Gelen bir hastanın hemen muayene olabilmesi olasılığını hesaplayınız.

(d) Sistemdeki bir hastanın harcadığı ortalama zamanı hesaplayınız.

(e) En fazla iki doktorun boş kalması olasılığını hesaplayınız.

(f) Sistemin dengede olup olmadığını belirleyiniz. Sistemin dengede olmaması ne anlama gelir?

Çözüm: Sistem $M/M/K=3/\infty$ kuyruk sistemidir. $\lambda = 4$ ve $\mu = 4$ olup, $\rho = 1$ dir.

(a) Öncelikle sistemin boş kalması olasılığını hesaplamalıyız:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^K}{(K-\rho)(K-1)!}} = \frac{1}{1+1+(1/2)+\frac{1}{(3-1)(2)!}} = \frac{4}{11}$$

Buradan, sırada bekleyen ortalama hasta sayısı,

$$L_q = \frac{P_0\rho^{K+1}}{(K-\rho)^2(K-1)!} = \frac{(4/11)}{(3-1)^2(3-1)!}\frac{1}{22} = 0.0455 \cong 0$$

olarak bulunur.

(b) $L = 0.0455 + 1 \cong 1$ olarak elde edilir.

(c) Gelen bir hastanın hemen muayene olabilmesi için Poliklinikte en fazla 2 hasta olmalıdır. Bu olayın olasılığı ise,

$$P_{n<3} = P_0 + P_1 + P_2 = \frac{4}{11}\left(1+1+(1/2)\right) = \frac{10}{11} = 0.9091$$

olarak hesaplanır.

(d) $W = \dfrac{1.0455}{4} \times (60) = 15.6825 \cong 16$ dakika olarak bulunur.

(e) $\Pr\left(\text{En fazla 2 doktorun boş kalması}\right) = 1 - P_0 = 1 - \dfrac{4}{11} = \dfrac{7}{11} = 0.6364 \cong 0.64$

(f) $\dfrac{\rho}{K} = \dfrac{1}{3} < 1$ olduğu için sistem dengededir.

Örnek 5.7. Bir bankanın müşteri hizmetlerinde iki kişi hizmet vermektedir. Müşteriler ortalama 5 dakikada bir arama yapmaktadır buna karşın ortalama servis süresi ise 4 dakika sürmektedir. Gelişler arası sürenin ve hizmet sürelerinin üstel dağılıma uyduğu bilindiğine göre,

(a) Müşteri hizmetlerinin boş kalması olasılığını,

(b) Kuyrukta aramayı bekleyen ortalama müşteri sayısını (saatte),

(c) Kuyrukta geçen ortalama süreyi (dakika),

(d) Herhangi bir müşterinin beklemesi olasılığını,

(e) Bir müşterinin hizmet süresince kuyrukta 3 dakikadan fazla beklemesi olasılığını,

hesaplayınız.

Çözüm: $M/M/K = 2/\infty$ kuyruk sistemidir. $\lambda = 12$ ve $\mu = 15$ olup, $\rho = 0.8$ dir. Buna göre,

(a) $P_0 = \dfrac{1}{\sum_{n=0}^{K-1} \dfrac{\rho^n}{n!} + \dfrac{\rho^K}{(K-\rho)(K-1)!}} = \dfrac{1}{1 + (3/5) + \dfrac{(3/5)^2}{(2-3/5)}} = \dfrac{7}{13} \cong 0.54$
olarak bulunur.

(b) $L_q = \dfrac{P_0 \rho^{K+1}}{(K-\rho)^2 (K-1)!} = \dfrac{(7/13)(3/5)^3}{(2-3/5)^2} = \dfrac{27}{455} = 0.0593 \cong 0$ müşteri.

(c) $W_q = \dfrac{P_0 \rho^{K+1}}{\mu(K-\rho)^2 (K-1)!} = \dfrac{(0.0593}{5} \times (60) = 0.7121$ dakika olarak bulunur.

(d) $P_{n \geq 2} = 1 - P_0 - P_1 = 1 - \dfrac{7}{13}[1 + \dfrac{3}{5}] = \dfrac{29}{85} = 0.3412$ olarak elde edilir.

(e) $\Pr\left(T_q \geq \dfrac{3}{60}\right) = \dfrac{KP_K}{(K-\rho)}e^{-\mu t(K-\rho)} = \dfrac{2\frac{21}{65}}{(2-(3/5))}e^{-\frac{1}{20}5(2-(3/5))} = \dfrac{6}{13}e^{-\frac{7}{20}} = 0.3252$

Örnek 5.8. İstatistik Bölümü'nde ortak kullanıma ait iki yazıcı bulunmaktadır. Sisteme saatte ortalama 9 iş ulaşmaktadır. Bir yazıcının istenilen işi bitirme süresi ise ortalama 12 dakikadır. Yazıcılara iletilen iş talepleri arası geçen zaman süresi ile yazıcıların iş bitirme süresinin üstel dağılımlı olduğu varsayımı altında;

(a) İlgili kuyruk modelini oluşturunuz.

(b) Geliş hızı ve hizmet hızı parametrelerini belirleyiniz.

(c) Trafik yoğunluğunu bulunuz.

(d) Yazıcının boş kalma olasıklarını bulunuz.

(e) $n = 1, 2, 3, 4$ için yazıcıda n iş olma olasılıklarını bulunuz.

(f) Serviste olması beklenen ortalama iş sayısını bulunuz.

(g) Kuyrukta olması beklenen ortalama iş sayısını bulunuz.

(h) Sistemde olması beklenen ortalama iş sayısını bulunuz.

(i) Kuyrukta geçen ortalama bekleme süresini bulunuz.

(j) Sistemde geçen ortalama süreyi bulunuz.

(k) Bir işin kuyrukta 20 dakikadan fazla bekleme olasılığı nedir?

(l) Yazıcı daha hızlı bir moda alınıp iş bitirme süresi ortalama 8 dakikaya indirilirse c-k de istenenler nasıl değişir? Hesaplayıp yorumlayınız.

Çözüm: (a) Sistem M/M/2 sonsuz kuyruklu sistemdir.

(b) Geliş hızı, $\lambda = 9$ (saatte 9 iş gelmektedir), servis hızı ise saatte $\mu = 5$' tir.

(c) Trafik yoğunluğu $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{9}{5}$ olduğu görülür.

(d) İki yazıcının da boş kalması olasılığı,

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{K-1} \dfrac{\rho^n}{n!} + \dfrac{\rho^K}{(K-\rho)(K-1)!}} = \frac{1}{1 + (9/5) + \dfrac{(9/5)^2}{(2-9/5)}} = \frac{1}{19} \cong 0.05$$

Bir yazıcının boş kalması olasılığı,

$$P_1 = P_0\rho = \frac{1}{19}(\frac{9}{5}) = \frac{9}{95} \cong 0.10$$

(e)

$$\begin{aligned}
P_1 = &\quad P_0\rho = \frac{9}{95} = 0.0947 \\
P_2 = &\quad P_0\frac{\rho^2}{2!} = \frac{1}{19}\left(\frac{81}{50}\right) = \frac{81}{950} = 0.0853 \\
P_3 = &\quad P_0\frac{\rho^3}{(2^{3-2})2!} = \frac{1}{19}\left(\frac{729}{500}\right) = \frac{729}{9500} = 0.0767 \\
P_4 = &\quad P_0\frac{\rho^4}{(2^{4-2})2!} = \frac{1}{19}\left(\frac{6561}{5000}\right) = \frac{6561}{95000} = 0.0691
\end{aligned}$$

(f) $L_{servis} = \rho = \dfrac{9}{5} = 1.8 \cong 2$

(g) $L_q = \dfrac{P_0 \rho^{K+1}}{(K-\rho)^2 (K-1)!} = \dfrac{(1/19)(9/5)^3}{(2-9/5)^2} = \dfrac{729}{95} = 7.6737 \cong 8$

(h) $L = L_q + L_{servis} = 7.6737 + 1.8 = 9.4737 \cong 10$

(i) $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda} = \dfrac{7.6737}{9} = 0.8526(\times 60) \cong 51$ dakika

(j) $W = \dfrac{L}{\lambda} = \dfrac{9.4737}{9} = 1.0526(\times 60) \cong 51 + 12 = 63$ dakika

(k) $\Pr\left(T_q > \dfrac{20}{60}\right) = \dfrac{KP_K}{(K-\rho)} e^{-\mu t(K-\rho)} = \dfrac{2\frac{81}{950}}{(2-(9/5))} e^{-\frac{1}{3}5(2-(9/5))} = \dfrac{162}{190} e^{-\frac{1}{3}} = 0.6109.$

(l-c) $\mu = 7.5$ olup, trafik yoğunluğu, $\rho = \dfrac{6}{5} = 1.2$ şeklinde bir azalma gösterir.

(l-d) İki yazıcının da boş kalması olasılığı,

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^K}{(K-\rho)(K-1)!}} = \frac{1}{1 + (6/5) + \frac{(6/5)^2}{(2-6/5)}} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Bir yazıcının boş kalması olasılığı,

$$P_1 = P_0 \rho = \frac{1}{4}(\frac{6}{5}) = \frac{3}{10} = 0.30$$

(l-e)

$$
\begin{aligned}
P_1 = &\quad P_0\rho = \frac{3}{10} = 0.3 \\
P_2 = &\quad P_0\frac{\rho^2}{2!} = \frac{1}{4}\left(\frac{36}{50}\right) = \frac{9}{50} = 0.18 \\
P_3 = &\quad P_0\frac{\rho^3}{(2^{3-2})2!} = \frac{1}{4}\left(\frac{27}{250}\right) = 0.108 \\
P_4 = &\quad P_0\frac{\rho^4}{(2^{4-2})2!} = \frac{1}{4}\left(\frac{1296}{5000}\right) = 0.0648
\end{aligned}
$$

(l-f) $L_{servis} = \rho = \dfrac{6}{5} = 1.2 \cong 1$

(l-g) $L_q = \dfrac{P_0\rho^{K+1}}{(K-\rho)^2(K-1)!} = \dfrac{(1/4)(6/5)^3}{(2-6/5)^2} = \dfrac{27}{40} = 0.6750 \cong 1$

(l-h) $L = L_q + L_{servis} = 0.675 + 1.2 = 1.875 \cong 2$

(l-i) $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda} = \dfrac{1.875}{9} = 0.0750(\times 60) = 4.5$ dakika

(l-j) $W = \dfrac{L}{\lambda} = 4.5 + 8 = 12.5$ dakika

(l-k) $\Pr\left(T_q > \dfrac{20}{60}\right) = \dfrac{KP_K}{(K-\rho)}e^{-\mu t(K-\rho)} = \dfrac{2\frac{9}{50}}{(2-(6/5))}e^{-\frac{1}{3}7.5(2-(6/5))} = 0.45e^{-2} = 0.0609.$

Yazıcıların hızını 1/3 oranında artırmak, kuyrukta yazdırılmayı bekleyen iş sayısını yaklaşık %90 azaltmıştır. Bunun yanısıra, bir işin kuyrukta 20 dakikadan fazla beklemesi olasılığını ise yaklaşık 10 kat azaltmıştır.

Örnek 5.9. Bir devlet hastahanesinin dahiliye bölümünde 4 doktor hizmet vermektedir. Hastaların dahiliye bölümüne yönlendirilmeleri arasında geçen süre üstel dağılımlı olup ortalama 5 dakika arayla geliş yapmaktadırlar. Bir dahiliye doktorunun hizmet verme süresi ise ortalama 15 dakikadır. Buna göre,

(a) En az 2 doktorun boş kalması olasılığını,

(b) Muayene olmayı bekleyen ortalama hasta sayısını,

(c) Muayene olmak için bir hastanın ortalama beklediği süreyi,

(d) Muayene olmak için yönlendirilen herhangi bir hastanın sıra beklemesi olasılığını,

(e) Muayene olmak için gelen hastanın sırada bekleme süresinin 10 dakikadan fazla olması olasılığını

bulunuz.

Çözüm: Sistem, 4 hizmet kanalı bulunan $M/M/K = 4$ sonsuz kuyruklu sistemdir. Geliş hızı, $\lambda = 12$ (saatte 12 hasta gelmektedir). Hizmet hızı ise $\mu = 4$ tür. Buradan trafik yoğunluğu, $\rho = 3$ olarak bulunur.

(a) 2 doktorun boş kalması, 2 hastanın muayene olmasına, 3 doktorun boş kalması, sistemde 1 hastanın muayene olmasına, 4 doktorun boş kalması hiç hasta olmamasına denktir. Öncelikle 4 doktorun da boş kalması olasılığını yani muayene için hiç bir hastanın olmaması olasılığını hesaplayalım;

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{K-1} \dfrac{\rho^n}{n!} + \dfrac{\rho^K}{(K-\rho)(K-1)!}} = \frac{1}{1+3+\frac{3^2}{2}+\frac{3^3}{3!}+\dfrac{(3)^4}{(4-3)3!}} = \frac{2}{53} = 0.0377$$

$$P_{n\leq 2} = P_0 + P_1 + P_2 = P_0\left[1+\rho+\rho^2/2\right] = \frac{2}{53}\left[1+3+9/2\right] = \frac{17}{53} = 0.3208$$

(b) $L_q = \dfrac{P_0\rho^{K+1}}{(K-\rho)^2(K-1)!} = \dfrac{(2/53)(3)^5}{(4-3)^2 3!} = \dfrac{81}{53} = 1.5283 \cong 2$

(c) $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda} = \dfrac{1.5283}{12} = 0.1274(\times 60) = 7.6415 \cong 8$ dakika

(d) Hastanın sıra beklemesi için en az 4 hastanın muayene için bulunması gerekir

$$P_{n\geq 4} = \frac{4P_4}{4-\rho} = \frac{4\frac{P_0\rho^4}{4!}}{4-\rho} = 4\frac{(2/53)3^4}{4!} = \frac{27}{53} = 0.5094$$

(e) $\Pr\left(T_q > \dfrac{10}{60}\right) = \dfrac{KP_K}{(K-\rho)}e^{-\mu t(K-\rho)} = \dfrac{27}{53}e^{-4\frac{1}{6}(4-3)} = \dfrac{27}{53}e^{-2/3} = 0.2616.$

.

Örnek 5.10. Bir masaj salonuna saatte 8 müşteri gelmektedir. Bu salonda 5 ayrı masöz görevlerini icra etmektedirler. Ortalama hizmet süresi 30 dakika sürmektedir. Müşteriler randevu ile gelmekte ve randevu saati geçmiş olsa bile kafede vakit geçirebilmektedir. Buna göre,

(a) Kuyrukta bekleyen ortalama müşteri sayısını bulunuz.

(b) Kuyrukta geçen ortalama süreyi bulunuz.

(c) Herhangi bir müşterinin kuyrukta [15,30) dakika beklemesi olasılığının 0.10' den az olabilmesi için masöz sayısı en az kaç olmalıdır?

Çözüm: Sistem, 5 hizmet kanalı bulunan $M/M/K = 5$ sonsuz kuyruklu sistemdir. Geliş hızı, $\lambda = 8$ ve hizmet hızı ise $\mu = 2$ dir. Buradan trafik yoğunluğu, $\rho = 4$ olarak bulunur.

(a) Kuyrukta bekleyen ortalama müşteri sayısını hesaplayabilmek için salonda veya beklemede hiç bir müşterinin olmaması olasılığını öncelikle hesaplamamız gerekir:

$$\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} = \sum_{n=0}^{5-1} \frac{4^n}{n!} = [1 + 4 + 8 + 2(64/6)] = \frac{103}{3}$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^K}{(K-\rho)(K-1)!}} = \frac{1}{\frac{103}{3} + \frac{4^5}{4!(5-4)}} = \frac{3}{231} = 0.013$$

$$L_q = \frac{P_0 \rho^{K+1}}{(K-\rho)^2 (K-1)!} = \frac{(3/231)(4)^6}{(5-4)^2 4!} = \frac{512}{231} = 2.2165 \cong 2$$

(b) $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda} = \dfrac{2.2165}{8} = 0.2771(\times 60) = 16.6234 \cong 17$ dakika

(c)
$$\begin{aligned} \Pr\left(\frac{15}{60} < T_q \leq \frac{30}{60}\right) &= \frac{KP_K}{(K-\rho)} \left[e^{-\mu \frac{1}{4}(K-\rho)} - e^{-\mu \frac{1}{2}(K-\rho)}\right] \\ &= \frac{KP_K}{(K-\rho)} e^{-\frac{1}{2}(K-4)} \left[1 - e^{-\frac{1}{2}(K-4)}\right] \end{aligned}$$

<u>$K = 5$ masöz yeterli mi? kontrol edelim</u>;

$$\Pr\left(\frac{15}{60} < T_q \leq \frac{30}{60}\right) = 5\frac{(3/231)4^5}{5!} e^{-\frac{1}{2}} \left[1 - e^{-\frac{1}{2}}\right] = \frac{128}{231} e^{-\frac{1}{2}} \left[1 - e^{-\frac{1}{2}}\right] = 0.1322$$

olup, 5 masöz yeterli değildir.

<u>$K = 6$ masöz için kontrol edelim</u>;

$$\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} = \sum_{n=0}^{6-1} \frac{4^n}{n!} = [1 + 4 + 8 + 2(64/6) + (128/15)] = \frac{643}{15}$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^K}{(K-\rho)(K-1)!}} = \frac{1}{\frac{643}{15} + \frac{4^6}{5!(6-4)}} = \frac{15}{899} = 0.0167$$

$P_6 = P_0 4^6/6! = 256/2697$ olarak hesaplanır. Buradan,

$$\Pr\left(\frac{15}{60} < T_q \leq \frac{30}{60}\right) = \frac{6\frac{256}{2697}}{2}\left[e^{-1} - e^{-2}\right] = 0.0662 < 0.1$$

olarak hesaplanır. Bu sonuca göre en az 1 masöz daha gereklidir.