Kuyruk Teorisi Ders Notları:

Bazı Kuyruk Modelleri

Mehmet YILMAZ

mehmetyilmaz@ankara.edu.tr

10 KASIM 2017

11. HAFTA

6 Çok kanallı, sonlu N kapasiteli, kuyruk sistemi M/M/K/N/∞

Birimlerin sisteme gelişleri arasındaki geçen sürenin $1/\lambda$ ortalamalı, birimlerin hizmet sürelerinin ise $1/\mu$ ortalamalı üstel dağılıma sahip olduğu düşünülmektedir. Bu kuyruk sisteminde K servis kanalı olup, kapasitenin N gibi sonlu birim ile sınırlandırıldığı, birimlerin kaynağının da sonsuz olduğu düşünülmektedir. Bu tür kapasiteli sistemlerde, $N+1$. veya daha sonraki birimler sistemden hizmet görmeden ayrılırlar. Böyle bir sıra bekleme sistemini "t" anında gözlediğimizi düşünelim."t" zamanında, bu sistemde $n > 0$ sayıda birim (müşteri) bulunması olasılığı $P_n(t)$ ile ilgileneceğiz. Bunun için $M/M/1/\infty/\infty$ sistemini tanıtırken elde edilen eşitlik (7)' yi kullanacağız.

Sistemde n birim olması olayı, aşağıdaki 4 durum ile açıklanabilir:

1. $n = 0$ durumu

$$0 = -\lambda P_0 + \mu P_1 \implies P_1 = \rho P_0 \tag{59}$$

2. $n \in [1, K-1]$ durumu

$$0 = -(\lambda + n\mu)P_n + \lambda P_{n-1} + (n+1)\mu P_{n+1} \tag{60}$$

3. $n = [K, N-1]$ durumu

$$0 = -(\lambda + K\mu)P_n + \lambda P_{n-1} + K\mu P_{n+1} \tag{61}$$

4. $n = N$ durumu

$$0 = -K\mu P_N + \lambda P_{N-1} \tag{62}$$

Şimdi, (59), (60) ve (61) denklemleri dikkate alınırsa, yinelemeli adımlar ile

$$P_n = \frac{\rho^n}{n!} P_0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, K \tag{63}$$

ifadesi elde edilir. (61) ve (62) denklemlerinden ise

$$P_n = \frac{\rho^n}{K^{n-K} K!} P_0, \quad n = K+1, K+2, \cdots, N \tag{64}$$

elde edilir. Şimdi P_0 ifadesinin ne olduğunu bulalım; $\sum_{n=0}^{N} P_n = 1$ olduğu düşüncesi ile,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{K-1} P_n + \sum_{n=K}^{N} P_n =& P_0 \Big[\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=K}^{N} \frac{\rho^n}{K^{n-K} K!} \Big] = P_0 \Big[\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^K}{K!} \sum_{n=K}^{N} \frac{\rho^{n-K}}{K^{n-K}} \Big] \\
=& P_0 \Big[\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^K}{K!} \sum_{n=0}^{N-K} \Big(\frac{\rho}{K} \Big)^n \Big] \\
=& P_0 \Big[\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^K}{K!} \frac{1 - \big(\frac{\rho}{K}\big)^{N-K+1}}{1 - \frac{\rho}{K}} \Big] = 1 \\
\Longrightarrow P_0 =& \Big[\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^K}{K!} \frac{1 - \big(\frac{\rho}{K}\big)^{N-K+1}}{1 - \frac{\rho}{K}} \Big]^{-1}
\end{aligned} \tag{65}$$

biçiminde elde edilir.

NOT: Bu kuyruk sisteminde $\dfrac{\rho}{K} \geq 1$ olabilir.

Artık, $M/M/K/N/\infty$ sisteminin karakteristiklerini bulabiliriz.

6.1 $M/M/K/N/\infty$ sistemi için kuyrukta olması beklenen birim sayısı

Bu sistemde kuyruk oluşabilmesi için bir birimin hizmet alırken, sisteme giriş yapan birimlerin belirli bir düzenek ile dizilmeleri gerekir, yani $n \geqslant K+1$ durumunda sistemde kuyruk oluşur. Buna göre,

$$
\begin{aligned}
L_q = \sum_{n=K+1}^{N} (n-K)P_n = \frac{P_0\rho^K}{K!} \sum_{n=K+1}^{N} (n-K)\left(\frac{\rho}{K}\right)^{n-K} &= \frac{P_0\rho^K}{K!} \sum_{n=1}^{N-K} n\left(\frac{\rho}{K}\right)^{n} \\
=&\frac{P_0\rho^{K+1}}{K!K} \sum_{n=1}^{N-K} n\left(\frac{\rho}{K}\right)^{n-1} = \frac{P_0\rho^{K+1}}{K!K}\left(\frac{d\sum_{n=1}^{N-K} r^n}{dr}\right)\Bigg|_{r=\frac{\rho}{K}} \\
=&\frac{P_0\rho^{K+1}}{K!K}\frac{d\left(\dfrac{r-r^{N-K+1}}{1-r}\right)}{dr}\Bigg|_{r=\frac{\rho}{K}} \\
=&\frac{P_0\rho^{K+1}}{K!K}\left(\frac{1-(N-K+1)r^{N-K}+(N-K)r^{N-K+1}}{(1-r)^2}\right)\Bigg|_{r=\frac{\rho}{K}} \\
=&\frac{P_0\rho^{K+1}}{(K-\rho)^2(K-1)!}\Big(1-(N-K+1)\Big(\frac{\rho}{K}\Big)^{N-K}+(N-K)\Big(\frac{\rho}{K}\Big)^{N-K+1}\Big) \\
=&\frac{\rho}{(K-\rho)^2}\Big(\rho P_{K-1}+P_N\Big[(N-K)\rho-(N-K+1)K\Big]\Big)
\end{aligned}
\tag{66}
$$

eşitliği elde edilir.

6.2 $M/M/K/N/\infty$ sistemi için serviste olması beklenen birim sayısı

Bu sistemde, $1 \leqslant n \leqslant K$ durumunda sistemde hep n birim hizmet görüyor olacaktır. $n > K$ durumunda ise K birim hizmet görüyor olacaktır. Buna göre,

$$
\begin{aligned}
L_{servis} =& \sum_{n=1}^{K} nP_n + \sum_{n=K+1}^{N} KP_n \\
=& P_0\Big[\sum_{n=1}^{K} n\frac{\rho^n}{n!} + K\sum_{n=K+1}^{N} \frac{\rho^n}{K^{n-K}K!}\Big] \\
=& P_0\Big[\sum_{n=1}^{K} \frac{\rho^n}{(n-1)!} + \frac{K\rho^K}{K!}\sum_{n=K+1}^{N} \frac{\rho^{n-K}}{K^{n-K}}\Big] \\
=& P_0\Big[\rho\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{K\rho^K}{K!}\sum_{n=1}^{N-K} \Big(\frac{\rho}{K}\Big)^n\Big] \\
=& P_0\Big[\rho\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{K\rho^{K+1}}{K!}\frac{\Big(1-\big(\frac{\rho}{K}\big)^{N-K}\Big)}{K-\rho}\Big] \\
=& P_0\Big[\rho\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{K\rho^{K+1}}{K!}\frac{\Big(1-\big(\frac{\rho}{K}\big)^{N-K}+\big(\frac{\rho}{K}\big)^{N-K+1}-\big(\frac{\rho}{K}\big)^{N-K+1}\Big)}{K-\rho}\Big] \\
=& P_0\Big[\rho\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{K\rho^{K+1}}{K!}\frac{\Big(1-\big(\frac{\rho}{K}\big)^{N-K+1}\Big)}{K-\rho} - \frac{K\rho^{K+1}}{K!}\Big(\frac{\rho}{K}\Big)^{N-K}\frac{\Big(1-\frac{\rho}{K}\Big)}{K-\rho}\Big] \\
=& \underbrace{\rho\, P_0\Big[\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^K}{(K-1)!}\frac{\Big(1-\big(\frac{\rho}{K}\big)^{N-K+1}\Big)}{K-\rho}\Big]}_{=1} - \rho\, \underbrace{P_0\frac{\rho^N}{K!K^{N-K}}}_{=P_N} \\
=& \rho\,[1-P_N]
\end{aligned}
\tag{67}
$$

şeklinde elde edilir.

6.3 $M/M/K/N/\infty$ sistemi için sistemde olması beklenen birim sayısı

Bu sistemde $n = 0, 1, 2, \cdots N$ durumu göz önüne alınarak bir beklenen değer bulunacaktır.

$$\begin{aligned}
L =& \sum_{n=0}^{K} nP_n + \sum_{n=K+1}^{N} nP_n \\
=& P_0\Big[\sum_{n=1}^{K} n\frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=K+1}^{N} n\frac{\rho^n}{K^{n-K}K!}\Big] \\
=& P_0\Big[\sum_{n=1}^{K} \frac{\rho^n}{(n-1)!} + \frac{\rho^K}{K!}\sum_{n=K+1}^{N} n\frac{\rho^{n-K}}{K^{n-K}}\Big] \\
=& P_0\Big[\rho\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^K}{K!}\sum_{n=1}^{N-K} (n+K)\Big(\frac{\rho}{K}\Big)^n\Big] \\
=& P_0\Big[\rho\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^K}{K!}\sum_{n=1}^{N-K} n\Big(\frac{\rho}{K}\Big)^n + \frac{\rho^K}{K!}\sum_{n=1}^{N-K} K\Big(\frac{\rho}{K}\Big)^n\Big] \\
=& P_0\Big[\rho\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{K+1}}{KK!}\sum_{n=1}^{N-K} n\Big(\frac{\rho}{K}\Big)^{n-1} + \frac{\rho^{K+1}}{(K-1)!}\frac{\Big(1-\big(\frac{\rho}{K}\big)^{N-K}\Big)}{K-\rho}\Big] \\
=& P_0\Big[\rho\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{K+1}\Big(1-(N-K+1)\Big(\frac{\rho}{K}\Big)^{N-K} + (N-K)\Big(\frac{\rho}{K}\Big)^{N-K+1}\Big)}{(K-\rho)^2(K-1)!} \\
&+ \frac{\rho^{K+1}}{(K-1)!}\frac{\Big(1-\big(\frac{\rho}{K}\big)^{N-K}\Big)}{K-\rho}\Big] \\
=& \rho P_0\Big[\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^K\Big(1+K-\rho-(N-\rho+1)\Big(\frac{\rho}{K}\Big)^{N-K} + (N-K)\Big(\frac{\rho}{K}\Big)^{N-K+1}\Big)}{(K-\rho)^2(K-1)!}\Big] \\
=& \underbrace{\rho\, P_0\Big[\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^K}{(K-1)!}\frac{\Big(1-\big(\frac{\rho}{K}\big)^{N-K+1}\Big)}{K-\rho}\Big]}_{=1} + \rho P_0\frac{\rho^K}{(K-\rho)^2(K-1)!} \\
&- \rho P_0\frac{\rho^K\Big(\frac{\rho}{K}\Big)^{N-K}\Big((N-\rho+1)K-\rho(N-\rho)\Big)}{(K-\rho)^2K!}\Big] \\
=& \rho - \rho\frac{\Big[KP_K - \Big((N-\rho+1)K-\rho(N-\rho)\Big)P_N\Big]}{(K-\rho)^2}
\end{aligned} \tag{68}$$

Aynı sonuca, kuyrukta olması beklenen birim sayısı ile serviste olması beklenen birim sayısının toplamını elde ederek ulaşabiliriz:

$$\begin{aligned} L =& L_q + L_{servis} \implies \\ L =& \frac{\rho}{(K-\rho)^2}\Big(\rho P_{K-1} + P_N\big[(N-K)\rho - (N-K+1)K\big]\Big) + \rho\,[1 - P_N] \end{aligned}$$

6.4 $M/M/K/N/\infty$ sistemi için birim başına kuyrukta geçen beklenen süre

Sistem dolu olduğunda, yani sistemde N birim olduğunda, hizmet için gelen birimler geri dönmektedir. Dolayısı ile, λ hızı kadar geliş olsa da etkin olarak hizmet alamayanları dikkate almamak gerekir. Geliş hızını sistemin boş kalması olasılığı ile çarparsak etkili geliş hızını elde edebiliriz: $\lambda_{eff} = \lambda(1-P_N)$. Bu durumda, $\lambda-\lambda_{eff}$ farkı hizmeti almadan geri dönen ortalama birim sayısıdır.

Little kanunu, kararlı bir sistemde kuyrukta veya sistemde olan ortalama birim sayısı ile kuyrukta veya sistemde birim başına beklenen süre arasında bir ilişki olduğunu söyler. Bu ilişki şöyle tanımlanır:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{eff}} = \frac{1}{\mu(K-\rho)^2\big[1-P_N\big]}\Big(\rho P_{K-1} + P_N\big[(N-K)\rho - (N-K+1)K\big]\Big) \quad (69)$$

6.5 $M/M/K/N/\infty$ sistemi için birim başına serviste geçen beklenen süre

Little kanunlarına göre birim başına serviste geçen ortalama süre

$$W_{servis} = \frac{L_{servis}}{\lambda_{eff}} = \frac{\rho\,[1 - P_N]}{\lambda\,[1 - P_N]} = \frac{1}{\mu} \tag{70}$$

şeklinde elde edilir.

6.6 $M/M/K/N/\infty$ sistemi için birim başına sistemde geçen beklenen süre

Benzer biçimde, Little kanunlarına göre birim başına sistemde geçen ortalama süre

$$\begin{aligned} W =& \frac{L}{\lambda_{eff}} = \frac{1}{\mu(K-\rho)^2\Big[1 - P_N\Big]}\Big(\rho P_{K-1} + P_N\Big[(N-K)\rho - (N-K+1)K\Big]\Big) + \frac{1}{\mu} \\ =& \frac{L}{\lambda_{eff}} = \frac{1}{\mu(K-\rho)^2\Big[1 - P_N\Big]}\Big(\rho P_{K-1} + (K-\rho)^2 + P_N\Big[(N+K)\rho - (N+1)K\Big]\Big) \end{aligned} \tag{71}$$

Öte yandan, $L = L_q + L_{servis}$ olduğu hatırlanırsa, $W = W_q + W_{servis}$ eşitliği elde edilir.

Kararlı sistemler için $(0, t]$ gibi bir zaman aralığında, sisteme giriş yapan ortalama birim sayısı ile sistemden hizmet alıp çıkış yapan ortalama birim sayısının dengede olduğu bilinmektedir (doğum-ölüm süreçleri gibi). A rastgele değişkeni ile sisteme $(0, t]$ zaman aralığında giriş yapan birimlerin sayısını, D rastgele değişkeni ile sistemden $(0, t]$ zaman aralığında hizmet alıp çıkan birimlerin sayısını gösterelim. Bu durumda,

$$E[A] = \lambda t \underbrace{[P_0 + P_1 + P_2 + \cdots + P_{N-2} + P_{N-1}]}_{=1-P_N}$$

ve

$$E[D] = \mu t \underbrace{[1P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \cdots + (K-1)P_{K-1} + KP_K + KP_{K+1} + KP_{K+2} + \cdots + KP_N]}_{=L_{servis}}$$

biçiminde elde edilirler. Denge durumu göz önüe alınırsa

$$E[A] = E[D] \implies L_{servis} = \frac{\lambda_{eff}}{\mu} = \rho_{eff} = \rho[1 - P_N]$$

serviste olması beklenen birim sayısı elde edilebilir.

Örnek 6.1. Bir masaj salonuna saatte 5 müşteri gelmektedir. Bu salonda 3 ayrı masöz görevlerini icra etmektedirler. Ortalama hizmet süresi 25 dakika sürmektedir ve bekleme salonunda ise 3 koltuk vardır. Gelen müşteri salondaki koltuklar dolu ise beklemeyip gitmektedirler. Buna göre,

(a) Sistemdeki saatlik ortalama müşteri sayısını bulunuz.

(b) Kuyrukta bekleyen ortalama müşteri sayısını bulunuz.

(c) Kuyrukta geçen ortalama süreyi bulunuz

(d) Sistemdeki bir müşterinin harcadığı ortalama zamanı hesaplayınız.

(e) Bir saatlik zaman dilimi içerisinde hizmet göremeyen ortalama müşteri sayısını bulunuz.

(f) En fazla iki masözün boş kalması olasılığını hesaplayınız.

(g) Herhangi bir müşterinin hizmet görememesi olasılığını hesaplayınız.

Çözüm: $M/M/3N=6$ kapasiteli sistemdir.

(a) $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}=\dfrac{5}{\frac{60}{25}}=\dfrac{25}{12}$

$$P_0=\left[\sum_{n=0}^{K-1}\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^K}{K!}\frac{1-\left(\frac{\rho}{K}\right)^{N-K+1}}{1-\left(\frac{\rho}{K5}\right)}\right]^{-1}=\left[1+\rho+\frac{\rho^2}{2}+\frac{\rho^3}{3!}\frac{1-\left(\frac{\rho}{3}\right)^{6-3+1}}{1-\left(\frac{\rho}{3}\right)}\right]^{-1}$$
$$=\left[1+\frac{25}{12}+\frac{\left(\frac{25}{12}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{25}{12}\right)^3}{3!}\frac{1-\left(\frac{25}{36}\right)^{6-3+1}}{1-\left(\frac{25}{36}\right)}\right]^{-1}=0.11$$

$$L_q=\sum_{n=3+1}^{6}(n-3)P_n=\frac{P_0\rho^3}{3!}\sum_{n=3+1}^{6}(n-3)\left(\frac{\rho}{3}\right)^{n-3}=\frac{0.11}{6}\left(\frac{25}{12}\right)^3\left[\frac{25}{36}+2\left(\frac{25}{36}\right)^2+3\left(\frac{25}{36}\right)^3\right]$$
$$=\frac{0.11}{6}\left(\frac{25}{12}\right)^3 2.6636=0.4416$$

$$L_{servis}=\frac{\lambda}{\mu}\left[1-P_N\right]=5\left[1-P_6\right]=\frac{5\left[1-\frac{P_0\rho^6}{3!*3^3}\right]}{\frac{12}{5}}=\frac{5\left[1-\left(\frac{0.11}{2}\right)\frac{\left(\frac{25}{12}\right)^6}{3^4}\right]}{\frac{12}{5}}$$
$$=\frac{5*0.9445}{12/5}=1.97$$

$$L=L_q+L_{servis}=0.4416+1.97=2.41$$

(b) $L_q\ =0.4416$

(c) $W_q=\dfrac{L_q}{\lambda_{eff}}=\dfrac{0.4416}{5*0.9445}=0.0935$ saat veya 5.61 dakika

(d) $W=5.61+25=30.61$

(e) $\lambda - \lambda_{eff} = \lambda P_6 = 5 - 5 * 0.9445 = 0.2775$

(f)

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 + P_3 =& P_0\Big(\rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{3!}\Big) = 0.11\left(\frac{25}{12}\right)\left[1 + \frac{25}{24} + \frac{625}{6 * 12^2}\right] = \frac{0.11 * 25 * 2389}{1728 * 6} \\ =& 0.6337 \end{aligned}$$

(g)

$$P_6 = \frac{\rho^N}{K^{N-K}K!}P_0 = \frac{(25/12)^6}{3^3 3!}0.11 = 0.0555$$