Kuyruk Teorisi Ders Notları:

Bazı Kuyruk Modelleri

Mehmet YILMAZ

mehmetyilmaz@ankara.edu.tr

10 KASIM 2017

12. HAFTA

6.7 $M/M/K/N/\infty$ sistemi için Bekleme zamanının dağılımı

T_j rastgele değişkeni j. birimin hizmet süresi olsun. Biliyoruz ki, $T_j \sim$ Üstel$\left(\frac{1}{\mu}\right)$ dir. Yeni gelen bir birimin bekletilmesi için sistemde bulunan birim sayısının $n \geq K$ olması gerekmektedir. Bu durumda, yeni gelen birim en fazla $n-K+1$ birimin hizmet görmesini bekleyecektir. Sistemde rastgele sayıda birim olduğuna göre, M rastgele değişkeni sistemde bulunan birim sayısını gösterirse, $M = n$ $(n \geq K)$ gözlendiğinde toplam servis zamanı $S = \sum_{j=1}^{n-K+1} T_j$ rastgele değişkeni ile gösterilecektir. Bu durumda, S rastgele değişkeninin dağılımı $Gamma(\alpha = n-K+1, \beta = \frac{1}{K\mu})$ olacaktır. S rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu ise

$$f_S(t) = \frac{(K\mu)^{n-K+1}}{(n-K)!} t^{n-K} e^{-K\mu t}, t > 0$$

şeklindedir. T_q rastgele değişkeni ise sisteme yeni giriş yapan bir birimin bekleme zamanı olsun. T_q rastgele değişkeninin dağılımını iki parçada inceleyeceğiz çünkü sıfır noktası (yani sistemde kanal sayısından az birim var iken bekleme yapmadan hizmet alacak) bir süreksizlik noktasıdır. $F_q(t)$ ile T_q rastgele değişkeninin dağılımı gösterilirse, $F_q(0)$ birimin serviste hiç beklememesi olasılığıdır. Öte yandan, geliş yapan bir birimin sisteme dahil olması için sistemin dolu olmaması gerekmektedir. Denge durumunda, gelen bir müşterinin sisteme dahil olmama olasılığı P_N dir. Sistemde $n(n < N)$ sayıda birim var iken geliş yapan bir birimin sisteme dahil olması olasılığı ise $\frac{P_n}{1-P_N}$ şeklinde verilir. Buna göre, $F_q(0) = \frac{\sum_{j=0}^{K-1} P_j}{1-P_N}$ dır. İkinci olarak, $T_q > 0$ olduğu durum düşünülecektir. Bekleme zamanının olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_q(t)$ ile gösterilirse, toplam olasılık formülü yardımı ile

$$f_q(t) = \sum_{m=K}^{N-1} \underbrace{Pr\left(S = t|M = m\right)}_{f_S(t)} \underbrace{Pr(M = m)}_{\dfrac{P_m}{1-P_N}} = \frac{1}{1-P_N} \sum_{m=K}^{N-1} \frac{(K\mu)^{m-K+1}}{(m-K)!} t^{m-K} e^{-K\mu t} P_m \tag{72}$$

biçiminde elde edilir. Buradan, bekleme zamanının dağılım fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
F_q(t) =& F_q(0) + \int_0^t f_q(t)dt = F_q(0) + \frac{1}{1-P_N} \sum_{m=K}^{N-1} P_m \int_0^t \frac{(K\mu)^{m-K+1}}{(m-K)!} t^{m-K} e^{-K\mu t} dt \\
=& F_q(0) + \frac{1}{1-P_N} \sum_{m=K}^{N-1} P_m \left(1 - \int_t^\infty \frac{(K\mu)^{m-K+1}}{(m-K)!} t^{m-K} e^{-K\mu t} dt\right) \\
=& F_q(0) + \frac{1}{1-P_N} \sum_{m=K}^{N-1} P_m \left(1 - \sum_{r=0}^{m-K} \frac{e^{-K\mu t}(K\mu t)^r}{r!}\right) \\
=& \frac{\sum_{j=0}^{K-1} P_j}{1-P_N} + \frac{1}{1-P_N} \sum_{m=K}^{N-1} P_m - \frac{e^{-K\mu t}}{1-P_N} \sum_{m=K}^{N-1} P_m \sum_{r=0}^{m-K} \frac{(K\mu t)^r}{r!} \\
=& 1 - \frac{P_0 e^{-K\mu t}}{(1-P_N)K!} \sum_{m=K}^{N-1} \frac{\rho^m}{K^{m-K}} \sum_{r=0}^{m-K} \frac{(K\mu t)^r}{r!} \\
=& 1 - \frac{\rho^K P_0 e^{-K\mu t}}{(1-P_N)K!} \sum_{m=0}^{N-K-1} \left(\frac{\rho}{K}\right)^m \sum_{r=0}^{m} \frac{(K\mu t)^r}{r!}
\end{aligned} \tag{73}$$

olarak elde edilir. Şimdi bu birim başına kuyrukta geçen ortalama süreyi teyit etmek için T_q rastgele değişkeninin beklenen değerini bulalım:

$$\begin{aligned}
W_q =& E[T_q] = \int_0^{\infty} \left(\frac{\rho^K P_0 e^{-K\mu t}}{(1-P_N)K!} \sum_{m=0}^{N-K-1} \left(\frac{\rho}{K}\right)^m \sum_{r=0}^{m} \frac{(K\mu t)^r}{r!} \right) dt \\
=& \frac{\rho^K P_0}{K\mu(1-P_N)K!} \sum_{m=0}^{N-K-1} \left(\frac{\rho}{K}\right)^m \sum_{r=0}^{m} \underbrace{\left(\int_0^{\infty} \frac{e^{-K\mu t}(K\mu)^{r+1} t^r}{r!} dt \right)}_{=1} \\
=& \frac{\rho^K P_0}{K\mu(1-P_N)K!} \sum_{m=0}^{N-K-1} (m+1)\left(\frac{\rho}{K}\right)^m = \frac{\rho^K P_0}{K\mu(1-P_N)K!} \sum_{m=1}^{N-K} m\left(\frac{\rho}{K}\right)^{m-1} \\
=& \frac{\rho^K P_0}{K\mu(1-P_N)K!} \frac{K - \left(\frac{\rho}{K}\right)^{N-K}\left(KN - K^2 + \rho K - N\rho + K\right)}{K\left(1-\frac{\rho}{K}\right)^2} \\
=& \frac{\rho^K P_0}{\mu(1-P_N)K!} \frac{K - \left(\frac{\rho}{K}\right)^{N-K}\left(KN - K^2 + \rho K - N\rho + K\right)}{\left(K-\rho\right)^2} \\
=& \frac{1}{\mu(K-\rho)^2\left[1-P_N\right]} \left(\rho P_{K-1} + P_N\left[(N-K)\rho - (N-K+1)K\right] \right)
\end{aligned} \tag{74}$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 6.2. (Masaj salonu örneği devam)

(h) Herhangi bir müşterinin kuyrukta 15 dakikadan fazla beklemesi olasılığını hesaplayınız.

Çözüm: (h) $\Pr(T_q > t) = \dfrac{e^{-k\mu t}}{1-P_N} \displaystyle\sum_{n=k}^{N-1} P_n \sum_{r=0}^{n-k} \frac{(k\mu t)^r}{r!}$

$$\Pr\left(T_q > \frac{15}{60}\right) = \frac{e^{-3\frac{12}{5}\left(\frac{1}{4}\right)}}{1-P_6}\left[P_3 + P_4\left(1+\frac{\left(3\frac{12}{5}\left(\frac{1}{4}\right)\right)}{1!}\right) + P_5\left(1+\frac{\left(3\frac{12}{5}\left(\frac{1}{4}\right)\right)}{1!}+\frac{\left(3\frac{12}{5}\left(\frac{1}{4}\right)\right)^2}{2!}\right)\right]$$

$$= \frac{e^{-\frac{9}{5}}}{1-P_6}\left[P_3 + P_4\left(1+\left(\frac{9}{5}\right)\right) + P_5\left(1+\left(\frac{9}{5}\right)+\left(\frac{81}{50}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{e^{-\frac{9}{5}}}{1-P_0\frac{\rho^6}{27*3!}}P_0\left[\frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{3*3!}\left(1+\left(\frac{9}{5}\right)\right) + \frac{\rho^5}{9*3!}\left(1+\left(\frac{9}{5}\right)+\left(\frac{81}{50}\right)\right)\right]$$

$$= 0.0193 * 7.65 = 0.1476$$

olarak hesaplanır.

Özet olması bakımından, $M/M/K/N/\infty$ kuyruk sistemi için gerekli formülleri aşağıda verilecektir.

M/M/K/N Kuyruk Sistemi için Formüller

λ geliş hızı, gelişler arası zaman $\frac{1}{\lambda}$ ortalamalı üstel dağılım

μ servis hızı, birimlerin servis süresi $\frac{1}{\mu}$ ortalamalı üstel dağılım

n sistemde bulunan birim sayısı

N sistemin kapasitesi

K servis kanal sayısı

ρ trafik yoğunluğu $\frac{\lambda}{\mu}$

P_0 sistemin boş kalması olasılığı $\left[\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^K}{K!} \frac{1-\left(\frac{\rho}{K}\right)^{N-K+1}}{1-\frac{\rho}{K}}\right]^{-1}$

P_n sistemde n birim olması olasılığı

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{\rho^n}{n!} P_0 & , n = 0, 1, 2, \cdots, K \\ \\ \dfrac{\rho^n}{K^{n-K} K!} P_0 & , n = K+1, K+2, \cdots, N \end{cases}$$

P_N sistemin dolu olması olasılığı $\frac{\rho^N}{K^{N-K} K!} P_0$

$$Pr\,(\text{sistemde en az } K \text{ birim bulunması}) = \frac{\rho^K \left(1 - \left(\frac{\rho}{K}\right)^{N-K+1}\right)}{(K-\rho)(K-1)!} P_0$$

λ_{eff} etkin geliş hızı $\lambda[1 - P_N]$

M/M/K/N Kuyruk Sistemi için Formüller (Devam)

L_q kuyrukta olması beklenen birim sayısı

$$\frac{\rho}{(K-\rho)^2}\left(\rho P_{K-1} + P_N\Big[(N-K)\rho - (N-K+1)K\Big]\right)$$

L_{servis} serviste olması beklenen birim sayısı $\rho_{eff} = \rho[1-P_N]$

L sistemde olması beklenen birim sayısı

$$L = L_q + L_{servis} = \frac{\rho}{(K-\rho)^2}\left(\rho P_{K-1} + P_N\Big[(N-K)\rho - (N-K+1)K\Big]\right) + \rho[1-P_N]$$

W_q kuyrukta geçen beklenen süre

$$\frac{1}{\mu(K-\rho)^2\Big[1-P_N\Big]}\left(\rho P_{K-1} + P_N\Big[(N-K)\rho - (N-K+1)K\Big]\right)$$

W_{servis} serviste geçen beklenen süre $\dfrac{L_{servis}}{\lambda_{eff}} = \dfrac{1}{\mu}$

W sistemde geçen beklenen süre $W = W_q + W_{servis} =$

$$\frac{1}{\mu(K-\rho)^2\Big[1-P_N\Big]}\left(\rho P_{K-1} + (K-\rho)^2 + P_N\Big[(N+K)\rho - (N+1)K\Big]\right)$$

T_q kuyrukta bekleme zamanı

$$\Pr(T_q \le t) = 1 - \frac{\rho^K P_0 e^{-K\mu t}}{(1-P_N)K!}\sum_{m=0}^{N-K-1}\left(\frac{\rho}{K}\right)^m \sum_{r=0}^{m}\frac{(K\mu t)^r}{r!}$$

Örnek 6.3. Bir polikliniğe saatte ortalama 10 hasta gelmektedir. Bu poliklinikte 3 doktor bulunmaktadır ve bir doktorun ortalama muayene süresi 30 dakikadır. Bekleme salonunda ise 5 koltuk vardır, gelen hasta polikliniğin dolu olduğunu görürse beklemeyip gitmektedirler. Buna göre,

(a) Kuyrukta bekleyen ortalama hasta sayısını bulunuz.

(b) Kuyrukta geçen ortalama süreyi bulunuz.

(c) Bir saatlik zaman dilimi içerisinde hizmet göremeyen ortalama hasta sayısını bulunuz.

(d) En az iki doktorun boş kalması olasılığını hesaplayınız.

(e) Herhangi bir hastanın hizmet görememesi olasılığını hesaplayınız.

(f) Herhangi bir hastanın kuyrukta 10 dakikadan fazla beklemesi olasılığını hesaplayınız.

(g) En az 2 hastanın kuyrukta beklemesi olasılığını hesaplayınız.

Çözüm: İlgilenilen sistem $M/M/K = 3/N = 8$ kuyruk sistemidir. Polikliniğe geliş hızı $\lambda = 10$, bir doktorun servis hızı ise $\mu = 2$ dir. buradan trafik yoğunluğu $\rho = 5$ olarak elde edilir.

İlk olarak poliklinikte hiç hasta olmaması olasılığını hesaplayalım;

$$
\begin{aligned}
P_0 =& \Big[\sum_{n=0}^{3-1} \frac{5^n}{n!} + \frac{5^3}{3!} \frac{1-\left(\frac{5}{3}\right)^{8-3+1}}{1-\frac{5}{3}}\Big]^{-1} = \Big[1+5+\frac{25}{2}+\frac{125}{4}\Big(\frac{15625}{729}-1\Big)\Big]^{-1} \\
=& \Big[1+5+\frac{25}{2}+\frac{125}{2}\Big(\frac{7448}{729}\Big)\Big]^{-1} = [\frac{37*729+7448*125}{729*2}]^{-1} = [\frac{957973}{1458}]^{-1} \\
=& 0.0015
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Şimdi de P_{3-1} ve P_8 olasılıklarını hesaplayalım;

$$P_{3-1} = \frac{5^2}{2!} 0.0015 = 0.019$$

ve

$P_8 = \dfrac{5^8}{3^{8-3}3!}0.0015 = 0.4019$

biçiminde hesaplanırlar.

(a) $L_q = \dfrac{5}{(3-5)^2}\Big(5P_2 + P_8\big[(8-3)5 - (8-3+1)3\big]\Big) = \dfrac{5}{4}\Big(5(0.019) + 0.4019(7)\Big)$
$= 3.6352 \cong 4$

(b) Kuyrukta geçen ortalama süreyi hesaplayabilmek için etkin geliş hızını bulmamız gerekir. $\lambda_{eff} = \lambda[1 - P_8] = 10[1 - 0.4019] = 5.981$ olup, herhangi bir hasta $W_q = \dfrac{3.6352}{5.981} =$ 0.6078 saat veya $36.4675 \cong 37$ dakika sırada beklemektedir.

(c) $\lambda - \lambda_{eff} = 10 - 5.981 = 4.019 \cong 4$

(d) 2 veya 3 doktor boş kalabilir, diğer bir ifade ile en fazla 1 hastanın poliklinikte olması anlamındadır. Buna göre,

$P_0 + P_1 = 0.0015 + 0.0015(5) = 0.009$

olarak hesaplanır.

(e) Sistemin dolu olması gerekir yani poliklinikte 8 hastanın olması gerekir. Bu olayın olasılığı ise $P_8 = 0.4019$ olarak bulunmuştu.

(f)

$$\Pr\left(T_q \geq \frac{10}{60}\right) = \frac{5^3(0.0015)e^{-3(2)\frac{1}{6}}}{(1-0.4019)3!}\sum_{m=0}^{8-3-1}\left(\frac{5}{3}\right)^m \sum_{r=0}^{m}\frac{(3(2)\frac{1}{6})^r}{r!}$$
$$= 0.0192\Big[1 + \frac{5}{3}(2) + \frac{25}{9}(5/2) + \frac{5^3}{3^3}(16/6) + \frac{5^4}{3^4}(65/24)\Big]$$
$$= 0.0192(44.5211) = 0.8558$$

(g) Kuyrukta en az 2 hasta olması demek poliklinikte en az 5 hasta olması demektir. Bu olayın olasılığı ise,

$$P_5 + P_6 + P_7 + P_8 = \frac{(0.0015)5^3}{6}\left[\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^3 + \left(\frac{5}{3}\right)^4\right] + 0.4019$$
$$= 0.0313(15.1235) + 0.4019 = 0.8753$$

şeklinde hesaplanır.

Örnek 6.4. Tekin ve Sami Beylerin birlikte çalıştığı bir araba yıkama istasyonu vardır. Bir araç yıkanırken 3 arabalık bekleme yerinde de sıradaki araçlar bekleyebilmektedir. Saatte ortalama 9 müşteri gelmekte ve bir araç ortalama 20 dakikada temizlenip müşteriye teslim edilmektedir.

(a) Tekin veya Sami Beyin boş kalması olasılığı nedir?

(b) İstasyondaki ortalama müşteri sayısı (saatte) nedir?

(c) Saatte ortalama kaç müşterinin geri dönmesini beklenir?

(d) Bir müşterinin sistemde harcadığı toplam ortalama zaman (dakika)

(e) Kuyrukta bekleyen ortalama müşteri sayısı (saatte)

(f) Arabasını yıkatmaya gelen Büşra Hanımın o an arabasını yıkatabilmesi ihtimali nedir?

Çözüm: Sistem $M/M/K = 2/N = 5$ iki servis kanallı sonlu 5 kapasiteli kuyruk sistemdir. Geliş hızı, $\lambda = 9$, servis hızı ise saatte $\mu = 3$' tür. Buradan trafik yoğunluğu $\rho = 3$ olduğu görülür.

(a) $P_0 = \left[1 + 3 + \frac{3^2}{2!}\frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{5-2+1}}{1 - \frac{3}{2}}\right]^{-1} = \frac{16}{649} = 0.0247$ olup, bir araç sistemde mevcut iken Tekin veya Sami Bey boşta beklemektedir. Buna göre, $P_1 = 3 * 0.0247 = 0.074$ olasılık ile bir çalışan boş kalmaktadır.

(b) Öncelikle P_1 ve P_5 olasılıklarını hesaplamalıyız:

$$P_1 = \rho P_0 = 3\frac{16}{649} = \frac{48}{649} \text{ ve } P_5 = \frac{\rho^5}{K^{5-K}K!}P_0 = \frac{3^5}{2^{5-2}2!}\left(\frac{16}{649}\right) = \frac{243}{649}$$

$$\begin{aligned}
L =& \frac{\rho}{(K-\rho)^2}\Big(\rho P_{K-1} + P_N\big[(N-K)\rho - (N-K+1)K\big]\Big) + \rho[1 - P_N] \\
=& \frac{3}{(2-3)^2}\Big(3\frac{48}{649} + \frac{243}{649}\big[(5-2)3 - (5-2+1)2\big]\Big) + 3[1 - \frac{243}{649}] \\
=& \frac{1161}{649} + \frac{1218}{649} = \frac{1379}{649} \cong 2
\end{aligned}$$

(c) Öncelikle istasyonun dolu olması olasılığını hesaplamalıyız; $P_5 = \frac{243}{649}$ olup, $9(\frac{243}{649}) \approx$ 3 müşterinin geri dönmesi beklenir.

(d) $\lambda_{eff} = 9(1 - \frac{243}{649}) = \frac{3654}{649}$ olup, $W = \frac{\frac{1379}{649}}{\frac{3654}{649}} = \frac{1379}{3654} \times (60) \approx 23$ dakikadır.

(e) $L_q = L - L_{servis} = \frac{1379}{649} - \left(\frac{3654}{649}\right)/3 = \frac{161}{649} \approx 0$ dir.

(f) İstasyonun yeni gelen Büşra Hanım'a servis edebilir olması gerekmektedir. $P_{n\leq 1} = P_0 + P_1 = \frac{16}{649} + \frac{243}{649} = \frac{259}{649} \approx$ %40 olasılık ile Büşra Hanım arabasını istasyonda yıkatabilir.

Örnek 6.5. $M/M/K/N = 4$ kuyruk sisteminde, trafik hızının $\rho = 0.90$ olduğunu varsayalım. Hizmet alamayanların ortalama sayısının, hizmet alabilenlerin sayısına oranının 1 : 4' ten küçük kalabilmesi için en az kaç servis kanalına ihtiyaç vardır?

Çözüm: $\frac{\lambda - \lambda_{eff}}{\lambda_{eff}} = \frac{\lambda P_4}{\lambda[1 - P_4]} \leq \frac{1}{4}$ olması istenmektedir. Buradan, $P_4 \leq \frac{1}{5}$ eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik yardımı ile $P_4 = \frac{0.90^4}{K^{4-K}K!}P_0$ olarak bulunur. Şimdi K servis kanal sayısına göre, P_0 olasılıklarını hesaplayalım:

<u>$K = 1$ için:</u>

$$\begin{aligned} P_0 =& \left[\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^K}{K!} \frac{1 - \left(\frac{\rho}{K}\right)^{N-K+1}}{1 - \frac{\rho}{K}}\right]^{-1} \\ =& [1 + 0.9\frac{1 - .9^4}{1 - .9}]^{-1} = \frac{30951}{40951} \end{aligned}$$

Şimdi P_4 olasılığını hesaplayabiliriz;

$$P_4 = \frac{0.90^4}{1^{4-1}1!}\left(\frac{30951}{40951}\right) = 0.4959 > \frac{1}{5}$$

<u>$K = 2$ için:</u>

$$
\begin{aligned}
P_0 =& \Big[\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^K}{K!} \frac{1 - \left(\frac{\rho}{K}\right)^{N-K+1}}{1 - \frac{\rho}{K}}\Big]^{-1} \\
=& [1 + 0.9 + \left(\frac{0.9^2}{2!}\right) \frac{1 - (.9/2)^3}{1 - .9/2}]^{-1} = 0.3892
\end{aligned}
$$

Şimdi P_4 olasılığını tekrardan hesaplayabiliriz;

$$
P_4 = \frac{0.90^4}{2^{4-2}2!}\Big(0.3892\Big) = 0.0319 \leq \frac{1}{5}
$$

Bu sonuca göre, servis kanal sayısı $K \geq 2$ olmalıdır.

Örnek 6.6. Bir oto lastik değişim istasyonunda 3 tane lift ve 2 araç kapasiteli bekleme yeri bulunmaktadır. İstasyona saatte ortalama 8 araba gelmektedir. Aracın lastiklerinin ortalama takılma süresi 30 dakika sürmektedir. Poisson gelişli ve Üstel hizmet süreli bu sistem için

(a) Kuyrukta olması beklenen araç sayısını bulunuz.

(b) Lastik değişim ücreti ortalama 50 lira olduğuna göre, sabah saat 8 : 00' den akşam saat 6 : 00' ya kadar çalışan servisin günlük ortalama ne kadar kazanması beklenir?

(c) Bu istasyonun günlük ortalama zararı nedir?

(d) Bir araç sahibinin bekleme süresini bulunuz.

Çözüm: Sistem $M/M/K = 3/N = 5$ olup 3 kanallı sonlu kapasiteli kuyruk sistemidir. Geliş hızı, $\lambda = 8$, servis hızı ise saatte $\mu = 2$' dir. Buradan trafik yoğunluğu $\rho = 4$ olduğu görülür.

(a)

$$\begin{aligned}P_0 =& \Big[\sum_{n=0}^{K-1}\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^K}{K!}\frac{1-\left(\frac{\rho}{K}\right)^{N-K+1}}{1-\frac{\rho}{K}}\Big]^{-1}\\ =&[1+4+8+\left(\frac{4^3}{3!}\right)\frac{1-(4/3)^3}{1-4/3}]^{-1}=\frac{27}{1535}\end{aligned}$$

$$P_1 = 4P_0 = \frac{108}{1535}$$

$$P_2 = \frac{4^2}{2!}P_0 = \frac{216}{1535}$$

ve

$$P_3 = \frac{4^3}{3!}P_0 = \frac{288}{1535}$$

$$P_4 = \frac{\rho^4}{3^{4-3}(3!)}\frac{27}{1535} = \frac{384}{1535}$$

$$P_5 = \frac{\rho^5}{3^{5-3}(3!)}\frac{27}{1535} = \frac{512}{1535}$$

olarak hesaplanırlar. Buradan,

$$L_q = \frac{384}{1535} + 2\Big(\frac{512}{1535}\Big) = \frac{1408}{1535}$$

olarak bulunur. Formül yardımı ile de bulabiliriz:

$$L_q = \frac{4}{(3-4)^2}\Big(4\Big(\frac{216}{1535}\Big) + \Big(\frac{512}{1535}\Big)\Big[(5-3)4 - (5-3+1)3\Big]\Big) = \frac{1408}{1535}$$

(b) İstasyonun dolu olması olasılığını yukarıda hesaplamamıştık; $P_5 = \dfrac{512}{1535}$ olup, buradan $\lambda_{eff} = 8(1 - \dfrac{512}{1535}) = 5.3316 \approx 5$ müşterinin hizmeti alması beklenir. Günde 10 saat ve araç başına ortalama 50 lira kazanç sağlandığına göre, ortalama kazanç, $10 \times 50 \times 5 = 2500$ olarak hesaplanır.

(c) Ortalama 3 araç sistem dolu olduğu için gitmektedir. Dolayısı ile günlük ortalama zarar, $10 \times 50 \times 3 = 1500$ olarak hesaplanır.

(d) $W_q = \dfrac{\frac{1408}{1535}}{8\Big(\dfrac{1023}{1535}\Big)} = \dfrac{176}{1535} \times (60) = 6.8795 \cong 7$ dakikadır.

Örnek 6.7. Haftanın 5 günü günde 8 saat çalışan bir berber dükkanında bir kişi çalışmak ve 2 bekleme koltuğu bulunmaktadır. Bu dükkana müşteriler ortalama 15 dakika ara ile gelmektedirler. Bir müşterinin ortalama servis süresi ise 20 dakikadır. Kişi başı ücret ortalama 20 liradır. Eğer bir çalışan daha işe alınırsa haftalık gelirin nasıl değişebileceğini açıklayınız. Bir çalışan almak yerine bir bekleme koltuğu alınsa idi ortalama gelir ve kaybı hesaplayınız.

Çözüm: Öncelikle berber dükkanında 1 çalışan varken kuyruk sistemi karakteristiklerini elde edelim; sistem $M/M/1/N = 3$ sonlu kapasiteli sistemdir. Geliş hızı saatte $\lambda = 4$ müşteri, servis hızı ise $\mu = 3$ müşteri olup, trafik yoğunluğu $\rho = 4/3$ tür.

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} = \frac{1-(4/3)}{1-(4/3)^4} = \frac{27}{175}$$

$$P_1 = \rho P_0 = (4/3)\frac{27}{175} = \frac{36}{175}$$

ve

$$P_n = \frac{\rho^n}{K^{n-K}K!}P_0$$

formülünden,

$$P_2 = (4/3)^2 \frac{27}{175} = \frac{48}{175}$$

$$P_3 = (4/3)^3 \frac{27}{175} = \frac{64}{175}$$

olarak elde edilir. Buradan sistemde bir saatlik zaman zarfı diliminde olması beklenen müşteri sayısı;

$$L = 1P_1 + 2P_2 + 3P_3 = \frac{324}{175} \cong 2$$

Diğer taraftan etkin geliş hızı,

$$\lambda_{eff} = \lambda[1 - P_3] = 4[1 - \frac{64}{175}] = \frac{444}{175} = \cong 3$$

olup, hizmet alamayıp dönenlerin sayısı da

$$\lambda - \lambda_{eff} = \frac{256}{175} \cong 1$$

dir. Bu durumda günlük ortalama gelir,

$$Gelir = (20)(\lambda_{eff})(8) = 160\frac{444}{175} = 405.9429$$

günlük ortalama kayıp;

Kayıp$= (20)(4 - \lambda_{eff})(8) = 640 - 405.9429 = 234.0571$

olur. Şimdi ikinci bir çalışan daha alındığında, sistem $M/M/K = 2/N = 4$ sonlu kapasiteli sistemdir. Geliş hızı saatte $\lambda = 4$ müşteri, servis hızı ise $\mu = 3$ müşteri olup, trafik yoğunluğu $\rho = 4/3$ tür.

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{K-1}\frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^K}{K!}\frac{1-\left(\frac{\rho}{K}\right)^{N-K+1}}{1-\frac{\rho}{K}}\right]^{-1} = \left[1 + (4/3) + \frac{(4/3)^2}{2}\left(\frac{1-(4/6)^3}{1-(4/6)}\right)\right]^{-1} = \frac{81}{341}$$

$$P_1 = \rho P_0 = \frac{108}{341}$$

$$P_2 = \frac{\rho^2}{2}P_0 = \frac{72}{341}$$

$$P_3 = \frac{(4/3)^3}{2^{3-2}2!}P_0 = \frac{48}{341}$$

$$P_4 = \frac{(4/3)^4}{2^{4-2}2!}P_0 = \frac{32}{341}$$

olarak elde edilir. Buradan sistemde bir saatlik zaman zarfı diliminde olması beklenen müşteri sayısı;

$$L = 1P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 = \frac{520}{341} \cong 2$$

Diğer taraftan etkin geliş hızı,

$$\lambda_{eff} = \lambda[1 - P_4] = 4[1 - \frac{32}{341}] = \frac{1236}{341}$$

olup, hizmet alamayıp dönenlerin sayısı da

$$\lambda - \lambda_{eff} = \frac{128}{341}$$

dir. Bu durumda günlük ortalama gelir,

$$Gelir = (20)(\lambda_{eff})(8) = 160\frac{1236}{341} = 579.9413$$

günlük ortalama kayıp;

Kayıp= $(20)(4 - \lambda_{eff})(8) = 640 - 579.9413 = 60.0587$

şeklinde hesaplanır. Yaklaşık 174 liralık bir kaybı önlemiş olur. Bekleme koltuklarının sayısı 1 artırılırsa $M/M/1/N = 4$ sistemine dönüşür.

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} = \frac{1-(4/3)}{1-(4/3)^5} = \frac{81}{781}$$

$$P_1 = \rho P_0 = (4/3)\frac{81}{781} = \frac{108}{781}$$

ve

$$P_2 = (4/3)^2\frac{81}{781} = \frac{144}{781}$$

$$P_3 = (4/3)^3\frac{81}{781} = \frac{192}{781}$$

$$P_4 = (4/3)^4\frac{81}{781} = \frac{256}{781}$$

olarak elde edilir. Diğer taraftan etkin geliş hızı,

$$\lambda_{eff} = \lambda[1 - P_4] = 4[1 - \frac{256}{781}] = \frac{2100}{781} =\cong 3$$

olup, hizmet alamayıp dönenlerin sayısı da

$$\lambda - \lambda_{eff} = \frac{1024}{781} \cong 1$$

dir. Bu durumda günlük ortalama gelir,

$$Gelir = (20)(\lambda_{eff})(8) = 160\frac{2100}{781} = 430.2177$$

günlük ortalama kayıp;

Kayıp= $(20)(4-\lambda_{eff})(8)=640-430.2177=209.7823$

olup. Bir bekleme koltuğu daha eklenirse, gelirde yaklaşık 24 lira bir artış beklenir.

Örnek 6.8. Bir kuaför salonuna saatte 5 müşteri gelmektedir. Bu salonda 3 ayrı kuaför hizmet vermektedir ve 3 müşteri için bekleme koltuğu bulunmaktadır. Ortalama hizmet süresi 25 dakika ve gelen müşteri salon dolu ise beklemeyip gitmektedirler. Buna göre,

(a) Sistemdeki saatlik ortalama müşteri sayısını bulunuz.

(b) Kuyrukta bekleyen ortalama müşteri sayısını bulunuz.

(c) Kuyrukta geçen ortalama süreyi bulunuz.

(d) Sistemdeki bir müşterinin harcadığı ortalama süreyi sayısını bulunuz.

(e) Bir saatlik zaman dilimi içerisinde hizmet alamayan ortalama müşteri sayısını bulunuz.

(f) En fazla 2 kuaförün boş kalması olasılığını bulunuz.

(g) Herhangi bir müşterinin hizmet görememesi olasılığını hesaplayınız.

(h) Herhangi bir müşterinin kuyrukta 15 dakikadan fazla beklemesi olasılığını hesaplayınız.

Çözüm: Sistem $M/M/K=3/N=6$ kuyruk sistemidir. Geliş hızı $\lambda=5$, servis hızı $\mu=12/5$ olup, trafik yoğunluğu $\rho=25/12$ dir. Öncelikle kuaför salonunun boş olması olasılığını hesaplayalım;

$$
\begin{aligned}
P_0 =&\Big[\sum_{n=0}^{K-1}\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^K}{K!}\frac{1-\left(\frac{\rho}{K}\right)^{N-K+1}}{1-\frac{\rho}{K}}\Big]^{-1}=\Big[1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^3}{3!}\frac{1-\left(\frac{\rho}{3}\right)^{N-3+1}}{1-\frac{\rho}{3}}\Big]^{-1}\\
=&\Big[1+25/12+\frac{(25/12)^2}{2!}+\frac{(25/12)^3}{3!}\frac{1-\left(\frac{(25/12)}{3}\right)^{6-3+1}}{1-\frac{(25/12)}{3}}\Big]^{-1}=\frac{483729408}{4372212133}=0.111
\end{aligned}
$$

$P_2=\dfrac{(25/12)^2}{2!}0.111=0.241$ ve $P_6=\dfrac{(25/12)^6}{3^{6-3}3!}0.111=0.056$

olup,

$$
\begin{aligned}
L_q =&\frac{\rho}{(K-\rho)^2}\Big(\rho P_{K-1}+P_N\big[(N-K)\rho-(N-K+1)K\big]\Big)\\
=&\frac{(25/12)}{(3-(25/12))^2}\Big((25/12)(0.241)+0.056\big[(6-3)(25/12)-(6-3+1)3\big]\Big)\\
=&0.447
\end{aligned}
$$

ve

$L_{servis}=\rho[1-P_N]=(25/12)[1-0.056]=1.97$ dir. Buradan,

(a) $L=L_q+L_{servis}=0.447+1.97=2.417$ biçiminde hesaplanır.

(b) $L_q=0.447$

(c) $W_q=\dfrac{L_q}{\lambda_{eff}}=\dfrac{0.447}{5(1-0.056)}\times(60)=5.68$ dakika

(d) $W = W_q + W_{servis} = 5.68 + 25 = 30.68$ dakika

(e) $\lambda P_6 = 5(0.056) = 0.2775$

(f) $P_1 + P_2 + P_3 = 0.111\left(\frac{25}{12}\right)[1 + \frac{(25/12)}{2} + \frac{(25/12)^2}{3!}] = 0.639$

(g) $P_6 = 0.056$

(h)

$$\begin{aligned}
\Pr(T_q \geq t) =& \frac{\rho^K P_0 e^{-K\mu t}}{(1-P_N)K!} \sum_{m=0}^{N-K-1} \left(\frac{\rho}{K}\right)^m \sum_{r=0}^{m} \frac{(K\mu t)^r}{r!} \\
=& \frac{(25/12)^3 (0.111) e^{-3(\frac{12}{5})(\frac{1}{4})}}{(1-0.056)3!} \sum_{m=0}^{6-3-1} \left(\frac{(25/12)}{3}\right)^m \sum_{r=0}^{m} \frac{\left(3(\frac{12}{5})(\frac{1}{4})\right)^r}{r!} \\
=& 0.029\left[1 + \frac{25}{36}(1 + 9/5) + \left(\frac{25}{36}\right)^2 (1 + 9/5 + 81/50)\right] \\
=& 0.029(5.076) = 0.147
\end{aligned}$$

Örnek 6.9. Bir müşteri danışma hattında 4 hat bulunmaktadır. Müşterilerin hat dolu olduğunda, yönlendirme müziği ile oyalanabileceği ve beklemede kalması için sürekli uyarı veren 10 hat daha vardır. Müşteriler ortalama 30 saniye ara ile çağrı merkezini aramaktadırlar. Hattın meşguliyeti ortalama 5 dakikadır. Buna göre, saatte ortalama hizmet alabilen müşteri sayısını ve hatların dolu olma olasılıklarını hesaplayınız. Yeni arama yapmak isteyen bir müşterinin kendisinden önce en fazla üç en az bir kişinin hatta beklemede olması olasılığını hesaplayınız.

Çözüm: Sistem $M/M/K = 4/N = 14$ kuyruk sistemidir. Geliş hızı $\lambda = 120$, servis hızı $\mu = 20$ olup, trafik yoğunluğu $\rho = 6$ dir. Öncelikle çağrı merkezinin boş kalması olasılığını hesaplayalım;

$$
\begin{aligned}
P_0 =& \Big[\sum_{n=0}^{K-1}\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^K}{K!}\frac{1-\left(\frac{\rho}{K}\right)^{N-K+1}}{1-\frac{\rho}{K}}\Big]^{-1} = \Big[1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^3}{3!}+\frac{\rho^4}{4!}\frac{1-\left(\frac{\rho}{4}\right)^{N-4+1}}{1-\frac{\rho}{4}}\Big]^{-1} \\
=& \Big[1+6+\frac{6^2}{2!}+\frac{6^3}{3!}+\frac{6^4}{4!}\frac{1-\left(\frac{6}{4}\right)^{14-4+1}}{1-\frac{6}{4}}\Big]^{-1} \\
=& \frac{512}{4758905} = 0.00010759
\end{aligned}
$$

$P_1 = 6(0.00010759) = 0.00064553$

$$P_2 = \frac{6^2}{2!}(0.00010759) = 0.0019$$

$$P_3 = \frac{6^3}{3!}(0.00010759) = 0.0039$$

$$P_4 = \frac{(8/3)^4}{4!}(0.00010759) = 0.0058$$

ve

$$P_{14} = \frac{6^{14}}{4^{14-4}4!}(0.00010759) = 0.335$$

olup,

$\lambda_{eff} = \lambda[1 - P_N] = 120[1 - .335] \cong 80$ müşteri hizmet alabilirken yaklaşık 40 müşteri hizmet alamamaktadır.

$$P_5 + P_6 + P_7 = \frac{6^5}{4!(4)}(0.00010759)\Big[1 + \frac{6}{4} + \Big(\frac{6}{4}\Big)^2\Big] = 0.0414$$

Örnek 6.10. Sipariş usulü çalışan küçük bir pizzacıda 2 telefon hattı bulunmaktadır. Ayrıca bu iki hat dolu olduğunda fazladan 2 müşteriyi de bekletme özelliğine sahiptir. Siparişler ortalama 10 dakika ara ile gelmektedir. Siparişin hazır olması ise ortalama 15 dakika sürmektedir.

(a) Kuyrukta bekleyen ortalama çağrı sayısını bulunuz.

(b) Kuyrukta geçen ortalama süreyi bulunuz.

Çözüm: Sistem $M/M/K = 2/N = 4$ kuyruk sistemidir. Geliş hızı $\lambda = 6$, servis hızı $\mu = 4$ olup, trafik yoğunluğu $\rho = 3/2$ dir. Öncelikle sipariş hattının boş kalması olasılığını hesaplayalım;

$$\begin{aligned}
P_0 =& \Bigg[\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^K}{K!} \frac{1 - \left(\frac{\rho}{K}\right)^{N-K+1}}{1 - \frac{\rho}{K}}\Bigg]^{-1} = \Bigg[1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} \frac{1 - \left(\frac{\rho}{2}\right)^{N-2+1}}{1 - \frac{\rho}{2}}\Bigg]^{-1} \\
=& \Bigg[1 + 1.5 + \frac{(3/2)^2}{2!} \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{4-2+1}}{1 - \frac{3}{4}}\Bigg]^{-1} \\
=& \frac{128}{653} = 0.196
\end{aligned}$$

Buradan, P_1 ve P_4 olasılıklarını hesaplayabiliriz:

$$P_1 = 1.5(0.196) = 0.294$$

$$P_4 = \frac{1.5^4}{2^{4-2}2!}(0.196) = 0.124$$

olup,

(a)

$$
\begin{aligned}
L_q =& \frac{\rho}{(K-\rho)^2}\Big(\rho P_{K-1} + P_N\Big[(N-K)\rho - (N-K+1)K\Big]\Big) \\
=& \frac{1.5}{(2-1.5)^2}\Big(1.5(0.294) + 0.124\Big[(4-2)1.5 - (4-2+1)2\Big]\Big) \\
=& 0.414
\end{aligned}
$$

(b) $\lambda_{eff} = 6[1 - 0.124] = 5.256$ olarak hesaplanır buradan,

$W_q = \dfrac{0.414}{5.256} \times (60) = 4.726$ dakika biçiminde hesaplanır.