Kuyruk Teorisi Ders Notları:

Bazı Kuyruk Modelleri

Mehmet YILMAZ

mehmetyilmaz@ankara.edu.tr

10 KASIM 2017

13. HAFTA

7 K kanallı, K kapasiteli kuyruk sistemi M/M/K/K/∞

Birimlerin sisteme gelişleri arasındaki geçen sürenin $1/\lambda$ ortalamalı, birimlerin hizmet sürelerinin ise $1/\mu$ ortalamalı üstel dağılıma sahip olduğu düşünülmektedir. Bu kuyruk sisteminde K servis kanalı olup, en fazla K birime hizmet verebilmektedir ve herhangi bir kuyruk oluşumuna izin vermemektedir. Birimlerin kaynağının da sonsuz olduğu düşünülmektedir. Böyle bir sıra bekleme sistemini "t" anında gözlediğimizi düşünelim."t" zamanında, bu sistemde $n > 0$ sayıda birim (müşteri) bulunması olasılığı P_n ile ilgileneceğiz. Denklem (7) dikkate alınırsa,

- Sistemde $n = 0$ birim olması durumu

$$-\lambda P_0 + \mu P_1 = 0 \implies P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 \tag{75}$$

- Sistemde $n = 1, 2, \cdots K - 1$ birim olması durumu

$$-(n\mu + \lambda) P_n + \lambda P_{n-1} + (n+1)\mu P_{n+1} = 0 \tag{76}$$

- Sistemde $n = K$ birim olması durumu

$$-K\mu P_n + \lambda P_{n-1} = 0 \tag{77}$$

Denklem (75) ve (76) birlikte çözüldüğünde ve (77) dikkate alındığında

$$P_n = P_0 \frac{\rho^n}{n!}, \quad n = 1, 2, \cdots K$$

sonucu elde edilir. Buradan,

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{K} \frac{\rho^n}{n!} \right]^{-1}$$

elde edilir. Sistem servis kanalı sayısı kadar kapasiteye sahip olduğundan sistemde herhangi bir kuyruk oluşumuna izin verilmemektedir. Sistem o an dolu ise, sonra gelen birim hizmet alamadan sistemden ayrılır. Dolayısı ile, $L_q = 0$ ve $W_q = 0$ dır.

Sistemde olması beklenen birim sayısı:

$$\begin{aligned} L =& P_0 \sum_{n=0}^{K} \frac{n\rho^n}{n!} = P_0 \rho \sum_{n=1}^{K} \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} = P_0 \rho \sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n}{n!} \\ =& \rho \left[1 - P_0 \frac{\rho^K}{K!} \right] \\ =& \rho [1 - P_K] = L_{servis} \end{aligned}$$

Sistemde geçen beklenen süre: Sistem dolu olduğunda, hizmet için gelen birimler geri dönmektedir. Dolayısı ile, λ hızı kadar geliş olsa da etkin olarak hizmet alamayanları dikkate almamak gerekir. Bu durumda geliş hızını sistemin K kanalında dolu olmaması olasılığı ile çarparsak etkili geliş hızını elde edebiliriz: $\lambda_{eff} = \lambda(1 - P_K)$. Bu durumda,

$\lambda - \lambda_{eff}$ farkı hizmeti almadan geri dönen ortalama birim sayısıdır.

$$W = \frac{L}{\lambda_{eff}} = \frac{1}{\mu} = W_{servis}$$

Örnek 7.1. Bir şirket 3 telefon hattına sahiptir, ortalama 3 dakika ara ile şirkete aramalar gelmektedir. Hattın ortalama meşguliyet süresi ise 6 dakikadır ve hatların tamamı dolu ise beklemeye alınmamakta meşgule düşmektedir.

(a) Sistemin boşta kalması olasılığı nedir?

(b) En az iki hattın boş kalması olasılığını hesaplayınız.

(c) Tüm hatların dolu olması olasılığını hesaplayınız.

(d) Ortalama kaç arama görüşme ile sonlanır?

(e) Gün içerisinde (8 saat) ortalama kaç müşteri şirleti aradığında bir görüşme yapamamıştır?

Çözüm: Sistem $M/M/K = 3/N = 3$ kuyruksuz sistemidir. Sisteme bir saatlik zaman dilimi içerisindeki aramaların ortalama sayısı yani geliş hızı, $\lambda = 20$ olarak elde edilir. Buna karşın, servis hızı $\mu = 10$ olup, trafik hızı ise $\rho = 2$ biçiminde hesaplanır.

(a) Sistemin boş olma olasılığına denktir; $P_0 = \left[1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}\right]^{-1} = \frac{3}{19}$.
(b) $P_1 = \rho P_0 = \frac{6}{19}$ olup, en az iki hattın boş kalması olasılığı, $P_0 + P_1 = \frac{9}{19}$ olarak hesaplanır.
(c) $P_3 = \frac{\rho^3}{3!} P_0 = \frac{4}{19}$.
(d) $\lambda_{eff} = 20(1 - 4/19) = 300/19 = 15.7895 \cong 16$.
(e) $\lambda - \lambda_{eff} = 80/19 \cong 4$ müşteri hizmet alamaz gün içerisinde ise ortalama $4 \times 8 = 32$ müşteri araması yanıtsız kalır.

NOT

* $\rho < 1$ olmak zorunda değildir.

Örnek 7.2. Bir kasabada, 3 taksisi bulunan bir taksi durağında müşteriler ortalama 15 dakikada bir gelmektedir. Taksinin hizmeti tamamlayıp geri dönmesi ortalama 1 saati bulmaktadır. Buna göre, hizmet için gelipte, hizmet alamayan ortalama müşteri sayısını bulunuz.

Çözüm: Sisteme bir saatlik zaman dilimi içerisindeki geliş hızı $\lambda = 4$, servis hızı $\mu = 1$ olup, trafik hızı ise $\rho = 4$ biçiminde hesaplanır. $P_0 = \left[1 + 4 + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!}\right]^{-1} = \frac{3}{71}$ olup, sistemin dolu olması olasılığı, $P_3 = \frac{4^3}{3!}(3/71) = \frac{32}{71}$ dir. Bu durumda, $\lambda - \lambda_{eff} = 4 - 4(1 - 32/71) = 128/71 \approx 2$ olup, yaklaşık olarak saatte ortalama 2 müşteri sistem dolu olduğu için hizmet alamaz.

Örnek 7.3. Haftanın 6 günü açık olan bir otomobil kiralama şirketinin kiraya verebilecek 5 arabası vardır. Günlüğü 300 liradan otomobil kiralamaktadır. Şirkete günde ortalama 2 müşteri gelmekte olup, ortalama kiralama süresi ise 3 gündür. Araç eğer kirada ise müşteriler sıraya girmemekte başka bir şirkete yönelmektedir. İlgili kuyruk modelini oluşturup, parametreleri elde ediniz. Haftalık gelir ve kaybı hesaplayınız.

Çözüm: Sistem $M/M/K = 5/5$ kuyruksuz sistemdir. Geliş hızı, $\lambda = 12$ (haftada 12 müşteri aramaktadır), servis hızı ise haftada $\mu = 2$' dir. Buradan trafik yoğunluğu $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{12}{2} = 6$ olduğu görülür.

- $P_0 = \left[\sum_{n=0}^{5} \frac{6^n}{n!}\right]^{-1} = [1 + 6 + 18 + 36 + 54 + 64.8]^{-1} = 0.0056$

- $P_5 = \dfrac{6^5}{5!}(0.0056) = 0.3629$

- Haftalık ortalama hizmet alan müşteri sayısı, $\lambda_{eff} = \lambda[1 - P_5] = 4(1 - 0.3629) = 2.5485$

- Haftalık hizmet alamayan ortalama müşteri sayısı, $\lambda - \lambda_{eff} = 1.4515$

- Haftalık ortalama gelir, $300 \times 3 \times (2.5485) = 2293.7$

- Haftalık ortalama kayıp, $300 \times 3 \times (1.4515) = 1306.3$

M/M/K/K Kuyruk Sistemi için Formüller

λ geliş hızı, gelişler arası zaman $\frac{1}{\lambda}$ ortalamalı üstel dağılım

μ servis hızı, birimlerin servis süresi $\frac{1}{\mu}$ ortalamalı üstel dağılım

n sistemde bulunan birim sayısı

ρ trafik yoğunluğu $\frac{\lambda}{\mu}$

P_0 sistemin boş kalması olasılığı $\left[\sum_{n=0}^{K} \frac{\rho^n}{n!}\right]^{-1}$

P_K sistemin dolu olması olasılığı $\frac{\rho^K}{K!}P_0$

$L_q = 0$

$L_{servis} = L = \rho[1 - P_K]$

$\lambda_{eff} = \lambda[1 - P_K]$

$W_q = 0$

$W_{servis} = \frac{L_{servis}}{\lambda_{eff}} = \frac{1}{\mu}$

$W = W_{servis} = \frac{1}{\mu}$