ADI:
SOYADI:
NUMARASI:
I. ÖĞRENİM//II. ÖĞRENİM (İŞARETLEYİNİZ)

İST 430 KUYRUK TEORİSİ ARASINAV SORULARI (02 MAYIS 2014)

1. Bir bankanın müşteri hizmetlerinde tek kişi hizmet vermektedir. Müşteriler ortalama 10 dakikada bir arama yapmaktadır buna karşın ortalama servis süresi ise 6 dakika sürmektedir. Buna göre,

a) Müşteri hizmetlerinin boş kalması olasılığını hesaplayınız.

b) Kuyrukta aramayı bekleyen ortalama müşteri sayısını bulunuz. (saatte)

c) Kuyrukta geçen ortalama süreyi hesaplayınız. (dakika)

d) En az bir müşterinin beklemesi olasılığını hesaplayınız.

e) Bir müşterinin kuyrukta bekleme süresinin 3 dakikadan fazla olması olasılığını hesaplayınız.

ÇÖZÜM: Sistem M/M/1 sonsuz kuyruklu sistemdir. Geliş hızı, $\lambda = 6$ (saatte 6 müşteri aramaktadır), servis hızı ise saatte $\mu = 10$ dir. Buradan trafik yoğunluğu $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{6}{10} = 0.6$ olduğu görülür.

a) $P_0 = 1 - \rho = 1 - .6 = 0.4$

b) $L_q = \rho \dfrac{\lambda}{\mu - \lambda} = 0.6 \dfrac{6}{10 - 6} = 0.9 \approx 1$

c) $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda} = \dfrac{0.9}{6} = 0.15(\times 60) = 9$ dakika

d) $P_{n>1} = 1 - P_0 - P_1 = 1 - P_0(1 + \rho) = 1 - 0.4(1 + 0.6) = 0.36$

e) $\Pr\left(T_q > \dfrac{3}{60}\right) = \rho e^{-\ \mu - \lambda\ t} = 0.6 e^{-(10-6)\frac{3}{60}} = 0.6 e^{\frac{-1}{5}} = 0.4912$

2. Bir emlakçının çalışanının ev satış için harcadığı ortalama zaman 25 dakikadır. Satışa harcadığı zamanın standart sapması ise 30 dakikadır. Saatte 2 müşteri emlakçıya evi görmek için gelmektedir. Emlakçı daha aktif bir çalışanı işe alıp diğerini çıkarma düşüncesindedir. İşverenin deneyimine göre bu şekilde bir karar aldığında, müşteriye evi göstermek için harcanılan zamanın 15 dakikaya standart sapmasının ise 25 dakikaya düşeceğini düşünmektedir. Buna göre, mevcut ve gelecekteki sistem için kuyrukta bekleyen ortalama müşteri sayısına göre karşılaştırma yapınız.

ÇÖZÜM: Sistem M/G/1 sistemidir yani gelişler arası sürenin dağılımı üstel iken servis süreleri ortalaması ve varyansı bilinen keyfi bir dağılımdır.

Geliş hızı, $\lambda = 2$

ADI:
SOYADI:
NUMARASI:
I. ÖĞRENİM//II. ÖĞRENİM (İŞARETLEYİNİZ)

Eski çalışanın saatteki servis hızı, standart sapması ve trafik yoğunluğu $\mu_{eski} = \frac{60}{25} = 2.4$, $\sigma_{eski} = \frac{1}{2}$,

$$\rho_{eski} = \frac{\lambda}{\mu_{eski}} = \frac{2}{\frac{12}{5}} = \frac{5}{6}$$

Olup, kuyrukta olması beklenen müşteri sayısı;

$$L_{q_{eski}} = \frac{\rho_{eski}^2}{1-\rho_{eski}}\left(\frac{1+\frac{\sigma_{eski}^2}{\mu_{eski}^2}}{2}\right) = \frac{\frac{25}{36}}{\frac{1}{6}}\left(\frac{1+\frac{\frac{1}{4}}{\frac{144}{25}}}{2}\right) = \frac{25}{12}\left(\frac{61}{36}\right) = 3.53$$

Yeni çalışanın saatteki servis hızı, standart sapması ve trafik yoğunluğu $\mu_{yeni} = \frac{60}{15} = 4$, $\sigma_{yeni} = \frac{25}{60} = \frac{5}{12}$,

$$\rho_{yeni} = \frac{\lambda}{\mu_{yeni}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Olup, kuyrukta olması beklenen müşteri sayısı;

$$L_{q_{yeni}} = \frac{\rho_{yeni}^2}{1-\rho_{yeni}}\left(\frac{1+\frac{\sigma_{yeni}^2}{\mu_{yeni}^2}}{2}\right) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}\left(\frac{1+\frac{\frac{25}{144}}{16}}{2}\right) = \frac{544}{144} = 3.78$$

Yeni çalışanı alıp, eskinin işine son vermek çok mantıklı gelmemektedir. Çünkü kuyrukta anlamlı bir azalma beklenmemektedir.

3. Ahmet Bey' in ayakkabı boyama ve ufak tamir işlerini yaptığı 3 müşterinin bekleyebileceği küçük bir dükkanı vardır. Ahmet Bey gelen bir işi ortalama 4 dakikada bitirmektedir, müşteriler ise dükkana ortalama 5 dakikada bir gelmektedir.

a) Ahmet Bey' in kendi başına kalması olasılığı nedir?

b) Dükkandaki ortalama müşteri sayısı (saatte)

c) Ahmet Bey, saatte ortalama kaç müşterinin geri dönmesini bekler?

d)Bir müşterinin sistemde harcadığı toplam ortalama zaman (dakika)

e) Kuyrukta bekleyen ortalama müşteri sayısı (saatte)

ADI:
SOYADI:
NUMARASI:
I. ÖĞRENİM//II. ÖĞRENİM (İŞARETLEYİNİZ)

f) Ayakkabı boyatmaya gelen Veli Bey' in o an ayakkabısını boyatması ihtimali nedir?

g) Yeni gelen bir müşterinin hizmet görebilmesi olasılığının %99 olabilmesi için kaç bekleme yerine daha ihtiyaç vardır?

h) Bir müşterinin kuyrukta 6 dakikadan fazla beklemesi olasılığını hesaplayınız.

ÇÖZÜM: Sistem M/M/1/N=4 sonlu kapasiteli kuyruk sistemidir.

a) Ayakkabı dükkanına saatte ortalama 12 müşteri gelmektedir, yani $\lambda = 12$ dır. Ahmet Beyin servis hızı ise, $\mu = 15$ dir. Buradan trafik hızı, $\rho = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ dir. Ahmet Bey' in yalnız kalması olasılığı sistemde hiç müşteri olmaması olasılığına denktir. Buradan,

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} = \frac{1-\frac{4}{5}}{1-\left(\frac{4}{5}\right)^5} = 0.2975 \cong 0.30$$

b) $L = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{N+1\ \rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}} = \frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}} - \frac{5\left(\frac{4}{5}\right)^5}{1-\left(\frac{4}{5}\right)^5} = 4 - \frac{\frac{1024}{625}}{\frac{2101}{3125}} = \frac{8404-5120}{2101} = \frac{3284}{2101} = 1.56$

c) $\lambda P_4 = 12\rho^N \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} = 12\left(\frac{4}{5}\right)^4 \frac{1-\frac{4}{5}}{1-\left(\frac{4}{5}\right)^5} = 12\frac{4^4}{5^5-4^5} = 12\frac{256}{2101} = 1.46$

d) $W = \frac{L}{\lambda_{eff}} = \frac{1.56}{1-P_4\ \lambda} = \frac{1.56}{12-1.46} = 0.148\ \times 60\ = 8.88$ dakika

e) $L_q = L - L_{servis} = 1.56 - \rho\ 1-P_4\ = 1.56 - \frac{\lambda_{eff}}{\mu} = 1.56 - \frac{10.54}{15} = 0.86$

f) Sistemin dolu olmaması gerekir, $P_{n\leq 3} = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1 - P_4 = 0.88$ olasılık ile Veli Bey ayakkabısını boyatabilir.

g) Sistemde n müşteri bulunması olasılığının 0.01 den küçük ya da eşit olması gerekir ki yeni gelen bir müşteri %99 veya daha yüksek olasılık ile sisteme giriş yapabilsin. Ona göre,

$$P_n = \rho^n \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}} \leq 10^{-2}$$

ADI:
SOYADI:
NUMARASI:
I. ÖĞRENİM//II. ÖĞRENİM (İŞARETLEYİNİZ)

$$\frac{1-\rho^{n+1}}{\rho^{n}\ 1-\rho} \geq 100 \Rightarrow \left(\frac{1}{\rho}\right)^{n} \geq 100\ 1-\rho\ +\rho \Rightarrow n \geq \frac{\ln\ 100\ \ +\ln\ 1-\rho}{-\ln\ \rho}$$

$$n \geq \frac{\ln\ 100\ \ -\ln\ 5}{\ln\ 5\ \ -\ln(4)} = 13.42 \Rightarrow n \geq 14 \text{ olmalıdır.}$$

h)

$$\Pr\ T_q > t\ = \frac{e^{-\mu t}}{1-P_N}\sum_{n=1}^{N-1} P_n \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\mu t^{\ r}}{r!} = \frac{e^{-\mu t}}{1-P_N}\left[P_1 + P_2\ 1+\ \mu t\ \ + P_3\left(1+\ \mu t\ +\frac{\mu t^{\ 2}}{2}\right)\right]$$

P_1	$\rho\dfrac{1-\rho}{1-\rho^{4}}$	$\left(\dfrac{4}{5}\right)\dfrac{\left(1-\dfrac{4}{5}\right)}{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^{4}} = \left(\dfrac{4}{5}\right)0.2975 = 0.238$
P_2	$\rho^{2}\dfrac{1-\rho}{1-\rho^{4}}$	$0.8 * 0.238 = 0.1904$
P_3	$\rho^{3}\dfrac{1-\rho}{1-\rho^{4}}$	$0.8 * 0.1904 = 0.15232$
P_4	$\rho^{4}\dfrac{1-\rho}{1-\rho^{4}}$	$0.8 * 0.15232 = 0.1219$

$$\Pr\left(T_q > \frac{6}{60}\right) = \frac{e^{-15\frac{1}{10}}}{0.88}\underbrace{\left[0.238 + 0.1904\left(1+\frac{3}{2}\right) + 0.15232\left(1+\frac{3}{2}+\frac{9}{8}\right)\right]}_{1.266} = 0.321$$

4. Bir havaalanına saatte 27 uçak iniş yapmaktadır. Uçakların servis zamanı 2 dakika ortalamalı üstel dağılıma uymaktadır. Bir uçağın beklemesi olasılığının 0.1 i geçmemesi için kaç pist gereklidir?

ÇÖZÜM: Sistem M/M/k çok kanallı sonsuz kaynaklı sistemdir.

$$\lambda = 27$$

$$\mu = 30$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{27}{30} = \frac{9}{10}$$

Bir müşterinin beklemesi olasılığı sistemde en az k kişinin olmasına denktir. Yani,

ADI:
SOYADI:
NUMARASI:
I. ÖĞRENİM//II. ÖĞRENİM (İŞARETLEYİNİZ)

$$P_{n\geq k}=\sum_{n=k}^{\infty}P_n=P_0\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\rho^n}{k!\,k^{n-k}}=P_0\frac{\rho^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\left(\frac{\rho}{k}\right)^{n-k}=P_0\frac{\rho^k}{k!}\frac{1}{1-\dfrac{\rho}{k}}=P_0\frac{\rho^k}{k-1\;!}\frac{1}{k-\rho}$$

$$=\frac{\dfrac{\rho^k}{k-1\;!}\dfrac{1}{k-\rho}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{k-1}\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^k}{(k-1)!\;k-\rho}}=\left[\frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{k-1}\frac{\rho^n}{n!}}{\dfrac{\rho^k}{(k-1)!\;k-\rho}}+1\right]^{-1}$$

Formülünden yararlanacağız.

$k=2$ **için**

$$P_{n\geq 2}=\left[\frac{1+\rho}{\dfrac{\rho^2}{(2-1)!\;2-\rho}}+1\right]^{-1}=\frac{\rho^2}{3}=\frac{\dfrac{81}{100}}{3}=0.27$$

0.1 değerini geçtiği için k=3 alınır;

$k=3$ **için**

$$P_{n\geq 3}=\left[\frac{1+\rho+\dfrac{\rho^2}{2}}{\dfrac{\rho^3}{(3-1)!\;3-\rho}}+1\right]^{-1}=\left[\frac{1+\dfrac{9}{10}+\dfrac{81}{200}}{\dfrac{\dfrac{9^3}{1000}}{2\left(3-\dfrac{9}{10}\right)}}+1\right]^{-1}=\left[\frac{42\;\;190+81\,/\,2}{9^3}+1\right]^{-1}=0.070029$$

K=3 için 0.1 in altında kaldığından 3 pist yeterlidir.

5. Bir iş merkezinde 4 kişilik 2 asansör aynı katlara hizmet vermektedir. Saatte ortalama 120 müşteri asansörleri kullanmak için gelmektedirler. Asansörün her birinin hizmeti tamamlayıp zemin kata tekrar inmesi 3 dakika sürmektedir. Buna göre,

a) Asansörlerin her ikisinin de boş kalması olasılığını

b) Kuyrukta bekleyen ortalama müşteri sayısını

c) Bir müşterinin kuyrukta harcadığı zamanı dakika cinsinden hesaplayınız

d) Servisteki ortalama müşteri sayısını

e) Sıra bekleyen 4 kişilik grubun kuyrukta 5 dakikadan fazla beklemesi olasılığını hesaplayınız

ADI:
SOYADI:
NUMARASI:
I. ÖĞRENİM//II. ÖĞRENİM (İŞARETLEYİNİZ)

f) Tam olarak bir asansörün boş kalması olasılığı

ÇÖZÜM: M/M/2 sonsuz kapasiteli servis sistemidir. Ona göre,

$\lambda = 30$

$\mu = 20$

a) $P_0 = \left[1 + \rho + \frac{\rho^2}{(2-1)!\ 2-\rho}\right]^{-1} = \left[1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{2}\right]^{-1} = \frac{1}{7}$

b) $L_q = P_0 \frac{\rho^{k+1}}{k-1\ !\ k-\rho^{\ 2}} = \frac{1}{7}\left[\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{\frac{1}{4}}\right] = \frac{27}{14} = 1.93 \cong 2(\times 4) = 8$ **kişi**

c) $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{2}{30}(\times 60) = 4$ **dakika**

d) $W_{servis} = W_q + 3 = 7$

$L_{servis} = \lambda W_{servis} = \frac{1}{2} 7 = 3.5$ **kişi veya 1 grup**

e) $\Pr\left(T_q > \frac{5}{60}\right) = 1 - P_0 - P_1\ e^{-\ 2\mu-\lambda\ \frac{1}{12}} = \left(1 - \frac{1}{7} - \frac{3}{14}\right)e^{-\ 40-30\ \frac{1}{12}} = \frac{9}{14}e^{-\frac{5}{6}} = 0.28$

f) Tam olarak bir asansörün boş kalması demek sistemde bulunan 4 kişilik müşteri grubundan 1 tane olmasına denktir. Bu olasılık ise, $\frac{3}{14}$ **dir.**

6. Bir masaj salonuna saatte 5 müşteri gelmektedir. Bu salonda 3 ayrı masöz görevlerini icra etmektedirler. Ortalama hizmet süresi 25 dakika sürmektedir ve bekleme salonunda ise 3 koltuk vardır. Gelen müşteri salondaki koltuklar dolu ise beklemeyip gitmektedirler. Buna göre,

a) Sistemdeki saatlik ortalama müşteri sayısını bulunuz.

b) Kuyrukta bekleyen ortalama müşteri sayısını bulunuz.

c) Kuyrukta geçen ortalama süreyi bulunuz

d) Sistemdeki bir müşterinin harcadığı ortalama zamanı hesaplayınız.

e) Bir saatlik zaman dilimi içerisinde hizmet göremeyen ortalama müşteri sayısını bulunuz.

f) En fazla iki masözün boş kalması olasılığını hesaplayınız

ADI:
SOYADI:
NUMARASI:
I. ÖĞRENİM//II. ÖĞRENİM (İŞARETLEYİNİZ)

g) Herhangi bir müşterinin hizmet görememesi olasılığını hesaplayınız.

h) Herhangi bir müşterinin kuyrukta 15 dakikadan fazla beklemesi olasılığını hesaplayınız.

ÇÖZÜM: M/M/3 N=6 kapasiteli sistemdir.

a) $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{\frac{60}{25}} = \frac{25}{12}$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{k-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^k}{k!} \frac{1-\left(\frac{\rho}{k}\right)^{N-k+1}}{1-\left(\frac{\rho}{k}\right)} \right]^{-1} = \left[1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{3!} \frac{1-\left(\frac{\rho}{3}\right)^{6-3+1}}{1-\left(\frac{\rho}{3}\right)} \right]^{-1}$$

$$= \left[1 + \frac{25}{12} + \frac{\left(\frac{25}{12}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{25}{12}\right)^3}{3!} \frac{1-\left(\frac{25}{36}\right)^{6-3+1}}{1-\left(\frac{25}{36}\right)} \right]^{-1} = 0.11$$

$$L_q = \sum_{n=3+1}^{6} (n-3) P_n = \frac{P_0 \rho^3}{3!} \sum_{n=3+1}^{6} (n-3) \left(\frac{\rho}{3}\right)^{n-3} = \frac{0.11}{6} \left(\frac{25}{12}\right)^3 \left[\frac{25}{36} + 2\left(\frac{25}{36}\right)^2 + 3\left(\frac{25}{36}\right)^3 \right]$$

$$= \frac{0.11}{6} \left(\frac{25}{12}\right)^3 2.6636 = 0.4416$$

$$L_{servis} = \frac{\lambda}{\mu}\left[1 - P_N\right] = 5\left[1 - P_6\right] = \frac{5\left[1 - \frac{P_0 \rho^6}{3! * 3^3}\right]}{\frac{12}{5}} = \frac{5\left[1 - \left(\frac{0.11}{2}\right) \frac{\left(\frac{25}{12}\right)^6}{3^4}\right]}{\frac{12}{5}}$$

$$= \frac{5 * \ 0.9445}{12 / 5} = 1.97$$

$$L = L_q + L_{servis} = 0.4416 + 1.97 = 2.41$$

b) $L_q = 0.4416$

c) $W_q = \frac{L_q}{\lambda_{eff}} = \frac{0.4416}{5 * 0.9445} = 0.0935$ **saat veya 5.61 dakika**

d) $W = 5.61 + 25 = 30.61$

ADI:
SOYADI:
NUMARASI:
I. ÖĞRENİM///II. ÖĞRENİM (İŞARETLEYİNİZ)

e) $\lambda - \lambda_{eff} = \lambda P_6 = 5 - 5 * 0.9445 = 0.2775$

f) $P_1 + P_2 = P_0\rho + P_0\frac{\rho^2}{2} = 0.11\left(\frac{25}{12}\right)\left[1+\frac{25}{24}\right] = \frac{0.11 * 25 * 49}{144 * 2} = 0.4679$

g) $P_{n\geq 6} = 1 - \; P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 \; = 1 - P_0\left[1 + \sum_{n=1}^{3}\frac{\left(\frac{25}{12}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{25}{12}\right)^4}{3 * 3!} + \frac{\left(\frac{25}{12}\right)^5}{9 * 3!}\right]$

$= 1 - 0.11\left[7.5338\right] = 0.1713$

h) $\Pr\; T_q > t \; = \frac{e^{-k\mu t}}{1-P_N}\sum_{n=k}^{N-1}P_n\sum_{r=0}^{n-k}\frac{k\mu t^{\;r}}{r!}$

$$\Pr\left(T_q > \frac{15}{60}\right) = \frac{e^{-3\frac{12}{5}\left(\frac{1}{4}\right)}}{1-P_6}\left[P_3 + P_4\left(1 + \frac{\left(3\frac{12}{5}\left(\frac{1}{4}\right)\right)}{1!}\right) + P_5\left(1 + \frac{\left(3\frac{12}{5}\left(\frac{1}{4}\right)\right)}{1!} + \frac{\left(3\frac{12}{5}\left(\frac{1}{4}\right)\right)^2}{2!}\right)\right]$$

$$= \frac{e^{-\frac{9}{5}}}{1-P_6}\left[P_3 + P_4\left(1+\left(\frac{9}{5}\right)\right) + P_5\left(1+\left(\frac{9}{5}\right)+\left(\frac{81}{50}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{e^{-\frac{9}{5}}}{1-P_0\frac{\rho^6}{27 * 3!}}P_0\left[\frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{3 * 3!}\left(1+\left(\frac{9}{5}\right)\right) + \frac{\rho^5}{9 * 3!}\left(1+\left(\frac{9}{5}\right)+\left(\frac{81}{50}\right)\right)\right]$$

$= 0.0193 * 7.65 = 0.1476$