2.2. Homogen Diferensiyel Denklemler

Tanım: $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x,y)$ olacak şekilde $k \in \mathbb{R}$ sayısı varsa $f(x,y)$ fonksiyonununa k-yıncı dereceden homogen fonksiyon denir.

Örnek 1. $f(x,y) = x^2 - 2xy$ fonksiyonu ikinci dereceden homogen bir fonksiyondur. Gerçekten

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= \lambda x^2 - 2\lambda^2 xy \\ &= \lambda^2 \left(x^2 - 2xy\right) \\ &= \lambda^2 \ f(x,y) \end{aligned}$$

sağlanır.

Örnek 2. $f(x,y) = \dfrac{2x+y}{x-2y}$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= \frac{2\lambda x + \lambda y}{\lambda x - 2\lambda y} \\ &= \frac{\lambda(2x+y)}{\lambda(x-2y)} \\ &= \lambda^0 \ f(x,y) \end{aligned}$$

gerçeklendiğinden $f(x,y)$ sıfırıncı dereceden homogen bir fonksiyondur.

Tanım: Birinci basamaktan

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

diferensiyel denkleminde $P(x,y)$ ve $Q(x,y)$ fonksiyonları aynı dereceden homogen fonksiyon ise bu denklem **homogen diferensiyel denklem** olarak adlandırılır. Homogen bir diferensiyel denklem $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ formunda yazılabilir. Bu denklemi çözmek için $y = vx$ değişken değiştirmesi uygulanırsa denklem v bağımlı, x bağımsız değişkenli değişkenlerine ayrılabilen bir diferensiyel denkleme dönüşür.

Örnek 1. $\left(-x\cot\left(\dfrac{y}{x}\right) + 2y\right)dx - 2xdy = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm. Diferensiyel denklem

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\cot\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

formunda yazılabildiğinden denklem homogen diferensiyel denklemdir.

$$\begin{aligned} y &= vx \\ y' &= v + xv' \end{aligned}$$

değişken değiştirmesi uygulanırsa

$$\begin{aligned}
v + xv' &= -\frac{1}{2}\cot v + v \\
-2xv' &= \cot v \\
-\frac{dv}{\cot v} &= \frac{dx}{2x}
\end{aligned}$$

değişkenlerine ayrılabilir denklem elde edilir. Bir kez integral alınırsa

$$\begin{aligned}
-\int \frac{\sin v}{\cos v} dv &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x} dx \\
\ln \cos v &= \frac{1}{2}\ln x + \ln c \\
\cos v &= c\sqrt{x}
\end{aligned}$$

bulunur. $v = \frac{y}{x}$ yerine yazılırsa homogen denklemin çözümü

$$\cos\frac{y}{x} = c\sqrt{x}$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 2. $y' = -\frac{3x+2y}{2x+3y}$ diferensiyel denkleminin çözümünü bulunuz.
Çözüm.

$$y' = -\frac{3x+2y}{2x+3y} = -\frac{3+2\frac{y}{x}}{2+3\frac{y}{x}} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

şeklinde yazılabildiğinden denklem homogen diferensiyel denklemdir.

$$\begin{aligned}
y &= vx \\
y' &= v + xv'
\end{aligned}$$

dönüşümü uygulandığında denklem

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2+3v}{3v^2+4v+3} dv$$

değişkenlerine ayrılabilir denkleme dönüşür. Bir kez integral alınırsa

$$c = x\sqrt{3v^2+4v+3}$$

bulunur. $v = \frac{y}{x}$ yerine yazılırsa

$$c = \sqrt{3y^2+4xy+3x^2}$$

elde edilir.

2.3. Homogen Diferensiyel Denkleme İndirgenebilen Denklemler

Birinci basamaktan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$$

diferensiyel denklemini ele alalım. $c_1 = c_2 = 0$ ise bu denklem homogen diferensiyel denkleme indirgenir. Şimdi c_1 ve c_2 den en az biri sıfırdan farklı olduğu durumu inceleyelim.

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

doğrularını ele alalım. $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$ olsun.

a) $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ ise bu iki doğru paraleldir ve katsayılarda ortak bir $ax + by$ ifadesi vardır. Bu durumda $a_1x + b_1y = v$ (yada $a_2x + b_2y = v$) değişken değiştirmesi uygulanır ve denklem değişkenlerine ayrılabilir denkleme indirgenir.

b) $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ise doğrular kesişir. Doğruların kesim noktası (x_0, y_0) olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} x - x_0 &= u \\ y - y_0 &= v \end{aligned}$$

dönüşümü uygulanırsa denklem homogen diferensiyel denkleme dönüşür.