2.7. Bernoullli Diferensiyel Denklemi

Bernoulli diferensiyel denkleminin genel formu

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^n \tag{1}$$

şeklindedir.

n nin 0 veya 1 olması durumunda sırasıyla değişkenlerine ayrılabilir ve lineer denklem durumu elde edilir.

$n \neq 0, 1$ durumunda bu denklemi çözmek için $z = y^{1-n}$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$y = z^{\frac{1}{1-n}} \quad \text{ve} \quad y' = \frac{1}{1-n} z^{\frac{n}{1-n}} z'$$

olur. Bu dönüşüm orjinal denklemi

$$\frac{1}{1-n} z^{\frac{n}{1-n}} z' + p(x)\, z^{\frac{1}{1-n}} = q(x)\, z^{\frac{n}{1-n}}$$

haline getirir. Daha sonra her taraf (sıfıra eşit olmayan) $z^{\dfrac{n}{1-n}}$ ile bölünerek

$$\frac{1}{1-n} z' + p(x)\, z = q(x)$$

şeklindeki lineer diferensiyel denklem elde edilir. Önce lineer diferensiyel denklem çözülür, sonra da $z = y^{1-n}$ yerine yazılarak Bernoulli diferensiyel denkleminin çözümü elde edilir. Ayrıca $n > 0$ ise $y = 0$ aykırı çözümü vardır.

Örnek 1. $3y^2y' + y^3 = e^{-x}$ denkleminin tüm çözümlerini bulunuz.

Çözüm. Verilen denklemi (1) deki forma getirirsek

$$y' + \frac{1}{3}y = \frac{e^{-x}}{3} y^{-2}$$

yazılır. $n = -2$ olmak üzere $z = y^3$, $\frac{dz}{dx} = 3y^2 \frac{dy}{dx}$ alarak denklemde yerine yazılırsa

$$z' + z = e^{-x} \tag{2}$$

olur. Burada integral çarpanı $\lambda(x) = e^{\int dx} = e^x$ dir.

(2) denklemi $\lambda(x)$ ile çarpılırsa

$$e^x z' + e^x z = 1$$

$$\Rightarrow (e^x z)' = 1$$

$$\Rightarrow e^x z = x + c$$

$$\Rightarrow z = (x + c)\, e^{-x}$$

elde edilir. Böylece genel çözüm

$$y\left(x\right)=\left(c+x\right)^{1/3}e^{-x/3}\ ,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

dir.

Örnek 2.

$$\frac{dy}{dx}+2xy=xe^{-x^2}y^3$$

denklemini çözünüz.

Çözüm. Burada $n=3$ olduğundan

$$z=y^{1-3}=y^{-2}\Rightarrow z'=-2y^{-3}y'$$

dir.

Şimdi denklemin her iki tarafı $-2y^{-3}$ ile çarpılarak

$$\begin{aligned}-2y^{-3}y'-4xy^{-2}&=-2xe^{-x^2}\\ \Rightarrow z'-4xz&=-2xe^{-x^2}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem lineerdir. İntegral çarpanı

$$e^{\int -4xdx}=e^{-2x^2}$$

olduğundan her iki taraf e^{-2x^2} ile çarpılarak

$$\begin{aligned}e^{-2x^2}z'-4xe^{-2x^2}z &= -2xe^{-3x^2}\\ \left(e^{-2x^2}z\right)' &= -2xe^{-3x^2}\\ ze^{-2x^2} &= \int -2xe^{-3x^2dx}=\frac{1}{3}\int -6xe^{-3x^2}dx=\frac{1}{3}e^{-3x^2}+c\\ z &= \frac{e^{-x^2}}{3}+ce^{2x^2}\end{aligned}$$

bulunur. Böylece genel çözüm:

$$y=\left(\frac{e^{-x^2}}{3}+ce^{2x^2}\right)^{-1/2}$$

olur. Ayrıca $n=3>0$ olduğundan $y=0$ aykırı çözümü vardır.

Örnek 3. $y'-\dfrac{2y}{3x}=y^4\ln x$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Örnek 4. $\dfrac{dy}{dx} + 3x^2 y = y^2 x e^{x^2}$, $y(1) = 0$ başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

Örnek 5. $x^2 y' - (2\ln x)\, y = y^3 e^{\frac{4\ln x}{x}}$ denkleminin çözümünü bulunuz.