4. Yüksek Basamaktan Lineer Diferensiyel Denklemler

n-yinci basamaktan lineer bir diferensiyel denklemin en genel hali $a_0(x) \neq 0$ olmak üzere

$$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = f(x) \qquad (1)$$

formundadır. $a_0(x)\,,\ a_1(x)\,, ..., a_n(x)$ ve $f(x)$ fonksiyonları $I \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlı, sürekli reel fonksiyonlardır. $a_0(x)\,,\ a_1(x)\,, ..., a_n(x)$ katsayılarının hepsi reel sabit ise denklem sabit katsayılı lineer denklem, bu katsayılardan en az biri x değişkenine bağlı ise denklem değişken katsayılı lineer denklem olarak adlandırılır. $f(x) \equiv 0$ ise bu denklem homogen, $f(x) \neq 0$ ise homogen olmayan lineer denklem olarak adlandırılır. n-yinci basamaktan lineer homogen diferensiyel denklemin genel formu

$$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = 0 \qquad (2)$$

dır. $D = \dfrac{d}{dx}$ olmak üzere D türev operatörü yardımıyla (1) diferensiyel denklemi

$$L(D)\,y = (a_0(x)\,D^n + a_1(x)\,D^n + ... + a_{n-1}(x)\,D + a_n(x))\,y = f(x)$$

formunda yazılabilir.

Teorem 1 (Varlık-Teklik):

$$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = f(x)$$
$$x_0 \in I \subset \mathbb{R} \text{ için } y(x_0) = \alpha_1,\ y'(x_0) = \alpha_2, ..., y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_n$$

başlangıç değer problemini ele alalım. Burada $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ ler keyfi reel sabitlerdir. Eğer her $x \in I$ için $a_0(x)\,,\ a_1(x)\,, ..., a_n(x)$ ve $f(x)$ fonksiyonları $I \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlı, sürekli fonksiyonlar ve $a_0(x) \neq 0$ ise bu başlangıç değer probleminin $I \subset \mathbb{R}$ aralığında bir tek $y(x)$ çözümü vardır.

Örnek 1. $y' + e^{1/x}y = \dfrac{1}{\sin x}$, $y(1) = 1$ başlangıç değer probleminin çözümünün varolduğu olduğu en geniş aralığı bulunuz.

Çözüm. $f(x) = e^{1/x}$ fonksiyonu $x \neq 0$ hariç her yerde süreklidir. $g(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ fonksiyonu $x \neq n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ için süreklidir. Çözümün varolduğu en geniş aralık $x_0 = 1 \in (0, \pi)$ aralığıdır.

Teorem 2 (Süperpozisyon Kuralı): $y_1, y_2, ..., y_n$ fonksiyonları (2) homogen diferensiyel denkleminin herhangi çözümü iseler $c_1, c_2, ..., c_n$'ler keyfi reel sabitler olmak üzere

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n$$

de (2) homogen diferensiyel denkleminin bir çözümüdür.

Lineer Bağımlılık-Lineer Bağımsızlık Kavramı: $f_1, f_2, ..., f_n$ fonksiyonları $I \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlı herhangi fonksiyonlar ve $c_1, c_2, ..., c_n$'ler keyfi reel sabitler olmak üzere her $x \in I$ için

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + ... + c_n f_n(x) = 0$$

olması sadece $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$ olması halinde sağlanıyorsa $f_1, f_2, ..., f_n$ fonksiyonlarına I üzerinde lineer bağımsızdır denir. Keyfi sabitlerin en az biri sıfırdan farklıyken bu eşitlik sağlanıyorsa bu durumda $f_1, f_2, ..., f_n$ fonksiyonlarına I üzerinde lineer bağımlıdır denir.

Örnek 2. $f_1(x) = \cos 2x$ ve $f_2(x) = \sin 2x$ fonksiyonları lineer bağımsızdır. Gerçekten

$$c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x = 0$$

olması sadece $c_1 = c_2 = 0$ olması ile mümkündür.

Örnek 3. $f_1(x) = e^x,\ f_2(x) = 2e^x,\ f_3(x) = 4e^x$ fonksiyonları lineer bağımlıdır. Gerçekten

$$c_1 e^x + 2c_2 e^x + 4c_3 e^x = 0$$

eşitliği $c_1 = -6,\ c_2 = c_3 = 1$ için gerçeklenir.

Wronskian Kavramı: $f_1, f_2, ..., f_n$ fonksiyonları $I \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlı fonksiyonlar olsunlar.

$$W(f_1, f_2, ..., f_n)(x) = \det \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & ... & f_n \\ f_1' & f_2' & ... & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

ile tanımlanan fonksiyona $f_1, f_2, ..., f_n$ fonksiyonlarının Wronskiani denir.

Teorem 3: $y_1, y_2, ..., y_n$ fonksiyonları (2) homogen diferensiyel denkleminin n tane çözümü iseler, $y_1, y_2, ..., y_n$ fonksiyonlarının lineer bağımsız olması için gerek ve yeter koşul her x için $W(y_1, y_2, ..., y_n)(x) \neq 0$ olmasıdır.

Teorem 4: $y_1, y_2, ..., y_n$ fonksiyonları (2) homogen diferensiyel denkleminin n tane lineer bağımsız çözümü olsunlar. $c_1, c_2, ..., c_n$'ler keyfi reel sabitler olmak üzere

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_n y_n(x)$$

fonksiyonu (2) homogen diferensiyel denkleminin genel çözümüdür.

Tanım: (2) homogen diferensiyel denkleminin n tane lineer bağımsız çözümü olan $y_1, y_2, ..., y_n$ fonksiyonlarının oluşturduğu $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ kümesine (2) homogen diferensiyel denkleminin temel çözümler kümesi denir.

Örnek 4. $y''' - y' = 0$ diferensiyel denkleminin lineer bağımsız çözümleri $y_1 = 1, y_2 = e^x$ ve $y_3 = e^{-x}$ dür. Gerçekten, $W(y_1, y_2, y_3)(x) = 2 \neq 0$ dır. Bu denklemin temel çözümler cümlesi $\{1, e^x, e^{-x}\}$ olup denklemin genel çözümü

$$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$$

dir.

n-yinci basamaktan lineer homogen olmayan

$$L(D)\,y = \left(a_0(x)\,D^n + a_1(x)\,D^n + ... + a_{n-1}(x)\,D + a_n(x)\right)y = f(x)$$

diferensiyel denklemini ele alalım. Bu denkleme ilişkin $L(D)\,y = 0$ homogen denklemin genel çözümü

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_n y_n(x)$$

ve homogen olmayan $L(D)\,y = f(x)$ denkleminin bir özel çözümü $y_p(x)$ ise homogen olmayan $L(D)\,y = f(x)$ denkleminin genel çözümü

$$y = y_h(x) + y_p(x)$$

dir.

Örnek 5. $y'' - y = \cos x$ denklemine ilişkin homogen denklem $y'' - y = 0$ olup bu denklemin lineer bağımsız çözümleri $y_1 = e^x$ ve $y_2 = e^{-x}$ dir ve homogen kısmın genel çözümü

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

dir. Homogen olmayan denklemin bir özel çözümü $y_p(x) = -\dfrac{\cos x}{2}$ olup homogen olmayan denklemin genel çözümü

$$\begin{aligned} y &= y_h(x) + y_p(x) \\ y &= c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \frac{\cos x}{2} \end{aligned}$$

dir.