ÖZEL ÇÖZÜM BULMA METODLARI

$a_0,\ a_1, ..., a_n$ 'ler reel sabitler ve $a_0 \neq 0$ olmak üzere n-yinci basamaktan sabit katsayılı lineer homogen olmayan diferensiyel denklem

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \tag{1}$$

formundadır. Bu denkleme ilişkin homogen denklem

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{2}$$

dir. (2) denkleminin genel çözümü $y_h(x)$, (1) denkleminin bir özel çözümü $y_p(x)$ olsun. Bu durumda (1) denkleminin genel çözümü

$$y = y_h(x) + y_p(x)$$

dir. Şimdi $y_p(x)$ özel çözümünü bulmak için bazı yöntemler verelim.

1. Belirsiz Katsayılar Metodu

$f(x)$ fonksiyonunun polinom, üstel fonksiyon yada $\sin ax$ (yada $\cos ax$) yada birbirleriyle çarpımları olması durumunda aşağıdaki formlarda özel çözümler aranır.

$f(x)$	$y_p(x)$
1	A
x	$ax + b$
x^n	$a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$
e^{ax}	Ae^{ax}
$\cos ax$ (yada $\sin ax$)	$A\cos ax + B\sin ax$
$e^{\alpha x}\cos ax$ (yada $e^{\alpha x}\sin ax$)	$e^{\alpha x}(A\cos ax + B\sin ax)$
$x^n e^{ax}$	$(a_n x^n + ... + a_1 x + a_0)\, e^{ax}$

Uyarı! Seçilen $y_p(x)$ özel çözümü homogen diferensiyel denklemin genel çözümü olan $y_h(x)$ de içeriliyorsa, $y_h(x)$ de içerilmeyecek şekilde x'in en küçük kuvveti ile çarpılarak özel çözüm aranır.

Örnek 1. $y'' + y = e^{2x}$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Bu denkleme ilişkin homogen denklem $y'' + y = 0$ olup bu denklemin genel çözümü

$$y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

dir. $y_p(x) = Ae^{2x}$ formunda özel çözüm arayalım. $y_p'(x) = 2Ae^{2x}$, $y_p''(x) = 4Ae^{2x}$ olup bunlar denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} y_p''(x) + y_p(x) &= e^{2x} \\ 4Ae^{2x} + Ae^{2x} &= e^{2x} \\ 5Ae^{2x} &= e^{2x} \end{aligned}$$

den $A = \frac{1}{5}$ elde edilir. $y_p(x) = \dfrac{1}{5}e^{2x}$ özel çözümü bulunur. Verilen denklemin genel çözümü

$$\begin{aligned} y &= y_h(x) + y_p(x) \\ y &= c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{5}e^{2x} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Örnek 2. $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Bu denkleme ilişkin $y'' - 4y' + 4y = 0$ homogen denklemin genel çözümü

$$y_h(x) = (c_1 + c_2 x)\, e^{2x}$$

dir. e^{2x} ve xe^{2x} homogen kısmın lineer bağımsız çözümleri olduğundan $y_p(x) = Ae^{2x}$ ve $y_p(x) = Axe^{2x}$ formunda özel çözüm arayamayız. $y_p(x) = Ax^2e^{2x}$ formunda özel çözüm aranırsa

$$y_p'(x) = 2Ax^2e^{2x} + 2Axe^{2x} \quad , \quad y_p''(x) = 4Ax^2e^{2x} + 8Axe^{2x} + 2Ae^{2x}$$

olup bu değerler denklemde yerine yazılırsa

$$y_p'' - 4y_p' + 4y_p = 3e^{2x}$$

$$\Longrightarrow 4Ax^2e^{2x} + 8Axe^{2x} + 2Ae^{2x} - 4\left(2Ax^2e^{2x} + 2Axe^{2x}\right) + 4Ax^2e^{2x} = 3e^{2x}$$

$$\Longrightarrow 2Ae^{2x} = 3e^{2x}$$

den $A = \dfrac{3}{2}$ olarak bulunur. Buradan özel çözüm $y_p(x) = \dfrac{3}{2}x^2e^{2x}$ olup verilen denklemin genel çözümü

$$y = (c_1 + c_2 x)\, e^{2x} + \frac{3}{2}x^2e^{2x}$$

olarak elde edilir.

Örnek 3. $y'' - 6y' + 9y = x + 1$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Bu denkleme ilişkin $y'' - 6y' + 9y = 0$ homogen denklemin genel çözümü

$$y_h(x) = (c_1 + c_2 x) e^{3x}$$

dir. $y_p(x) = Ax + B$ formunda özel çözüm aranırsa $y_p'(x) = A$, $y_p''(x) = 0$ dır. Buradan

$$\begin{aligned} y_p'' - 6y_p' + 9y_p &= x + 1 \\ -6A + 9(Ax + B) &= x + 1 \\ 9Ax + (9B - 6A) &= x + 1 \end{aligned}$$

olup $A = \dfrac{1}{9}$, $B = \dfrac{5}{27}$ olarak elde edilir. Özel çözüm $y_p(x) = \dfrac{x}{9} + \dfrac{5}{27}$ olup verilen denklemin genel çözümü

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{3x} + \frac{x}{9} + \frac{5}{27}$$

formunda bulunur.

Örnek 4. $y'' - 2y' - 3y = \sin x$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Homogen diferensiyel denklemin genel çözümü

$$y_h(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$$

dir. $y_p(x) = A\cos x + B\sin x$ formunda özel çözüm aranırsa

$$y_p(x) = \frac{1}{10}\cos x - \frac{1}{5}\sin x$$

özel çözümü elde edilir. Verilen denklemin genel çözümü

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{10}\cos x - \frac{1}{5}\sin x$$

şeklinde bulunur.

Örnek 5. $y'' + 4y = \cos 2x$ diferensiyel denkleminin bir özel çözümünü bulunuz.

Çözüm. $y_p(x) = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$ formunda özel çözüm aranır.