3. Parametrelerin Değişimi Yöntemi

n-yinci basamaktan lineer bir diferensiyel denklemin en genel hali $a_0(x) \neq 0$ olmak üzere

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = f(x) \qquad (1)$$

formundadır. $a_0(x),\ a_1(x), ..., a_n(x)$ ve $f(x)$ fonksiyonları $I \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlı, sürekli reel fonksiyonlardır. Bu denkleme ilişkin

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0$$

homogen diferensiyel denklemin genel çözümü

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_n y_n(x)$$

olsun. (1) denkleminin

$$y_p(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x) + ... + c_n(x)\, y_n(x) \qquad (2)$$

formunda bir özel çözümü aranırsa

$$\begin{cases} c_1'(x)\, y_1(x) + c_2'(x)\, y_2(x) + ... + c_n'(x)\, y_n(x) & = & 0 \\ c_1'(x)\, y_1'(x) + c_2'(x)\, y_2'(x) + ... + c_n'(x)\, y_n'(x) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1'(x)\, y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x)\, y_2^{(n-1)}(x) + ... + c_n'(x)\, y_n^{(n-1)}(x) & = & \frac{f(x)}{a_0(x)} \end{cases}$$

denklem sistemi ortaya çıkar. Bu denklem sisteminden $c_1'(x),\ c_2'(x), ..., c_n'(x)$ bulunur. Sonra integral alınarak $c_1(x),\ c_2(x), ..., c_n(x)$ elde edilir. Bulunan değerler (2) de yerine yazılarak özel çözüme ulaşılır.

Örnek 1. $xy'' - (x+1)\, y' + y = x^2$ diferensiyel denklemine ilişkin homogen denklemin iki lineer bağımsız çözümü $y_1 = e^x$ ve $y_2 = x+1$ ise genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen denkleme ilişkin homogen denklemin genel çözümü

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2(x+1)$$

dir.

$$y_p(x) = c_1(x)\, e^x + c_2(x)(x+1) \qquad (3)$$

formunda özel çözüm aranırsa

$$\begin{cases} c_1'(x)\, e^x + c_2'(x)(x+1) & = & 0 \\ c_1'(x)\, e^x + c_2'(x) & = & x \end{cases}$$

denklem sistemi ortaya çıkar. Bu denklem sisteminden

$$c_1'(x) = (x+1)\,e^{-x} \quad , \quad c_2'(x) = -1$$

bulunur. İntegral alınırsa

$$c_1(x) = -(x+2)\,e^{-x} \quad , \quad c_2(x) = -x$$

elde edilir. Bunlar (3) de yerine yazılırsa

$$y_p(x) = -x^2 - 2x - 2$$

özel çözümü bulunur. Buradan verilen denklemin genel çözümü

$$y = c_1 e^x + c_2(x+1) - x^2 - 2x - 2$$

formunda elde edilir.

Örnek 2. $y'' - 4y' - 5y = e^x$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. $y'' - 4y' - 5y = 0$ homogen diferensiyel denklemine ilişkin karakteristik denklem

$$r^2 - 4r - 5 = 0$$

olup $r_1 = 5,\ r_2 = -1$ iki reel farklı köke sahiptir. Buradan homogen denklemin genel çözümü

$$y_h(x) = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-x}$$

formundadır. Homogen olmayan denklemin

$$y_p(x) = c_1(x)\,e^{5x} + c_2(x)\,e^{-x}$$

formunda özel çözümü aranırsa

$$\begin{cases} c_1'(x)\,e^{5x} + c_2'(x)\,e^{-x} &= 0 \\ 5c_1'(x)\,e^{5x} - c_2'(x)\,e^{-x} &= e^x \end{cases}$$

denklem sistemi elde edilir. Buradan

$$c_1'(x) = \frac{1}{6}e^{-4x} \quad \text{ve} \quad c_2'(x) = -\frac{1}{6}e^{2x}$$

olarak bulunur. İntegral alınırsa

$$c_1(x) = -\frac{1}{24}e^{-4x} \quad \text{ve} \quad c_2(x) = -\frac{1}{12}e^{2x}$$

bulunur. Bu değerler yerine yazılırsa

$$y_p(x) = -\frac{1}{8}e^x$$

özel çözümü bulunur. Verilen denklemin genel çözümü

$$y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{8} e^{x}$$

dir.

Örnek 3. $y'' - y' - 2y = x^2 \sin x$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Örnek 4. $y'' + y = \csc x \cot x$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.