EULER DİFERENSİYEL DENKLEMİ

n-yinci basamaktan Euler diferensiyel denklemi $a_0(x) \neq 0$ olmak üzere

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)$$

formundadır. Burada $a_0,\ a_1, ..., a_n$ 'ler reel sabitlerdir. $D = \dfrac{d}{dx}$ olmak üzere türev operatörü yardımıyla bu denklem

$$\left(a_0 x^n D^n + a_1 x^{n-1} D^{n-1} + ... + a_{n-1} x D + a_n\right) y = f(x) \tag{1}$$

formunda yazılabilir. Bu denklemde $x = e^t$ değişken değişmesi yapılırsa

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt},\ x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}, ...$$

elde edilir. Bunu genellersek $D_1 = \dfrac{d}{dt}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} xD &= D_1 \\ x^2D^2 &= D_1(D_1-1) \\ x^3D^3 &= D_1(D_1-1)(D_1-2) \\ &\vdots \\ x^nD^n &= D_1(D_1-1)(D_1-2)...(D_1-n+1) \end{aligned}$$

elde edilir. Bunlar (1) denkleminde yerine yazılırsa Euler denklemi sabit katsayılı lineer diferensiyel denkleme indirgenir. Önce sabit katsayılı denklem çözülür, sonra $t = \ln x$ yerine yazılarsa Euler denkleminin genel çözümüne ulaşılır.

Örnek 1. $x^2y'' - xy' + 2y = x\ln x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. $\left(x^2D^2 - xD + 2\right) y = x\ln x$ denkleminde $x = e^t$ değişken değişmesi yapılırsa

$$xD = D_1 \quad , \quad x^2D^2 = D_1(D_1-1)$$

olur. Bunlar denklemde yerine yazılırsa,

$$\left(D_1^2 - 2D_1 + 2\right) y = te^t \tag{2}$$

sabit katsayılı denklemi elde edilir. Bu denkleme ilişkin homogen denklemin genel çözümü

$$y_h(t) = e^t(c_1\cos t + c_2\sin t)$$

dir. Belirsiz katsayılar yönteminden

$$y_p(t) = (At + B)e^t$$

formunda özel çözüm aranırsa $y_p(t) = te^t$ olarak bulunur. Buradan (2) denkleminin genel çözümü

$$y = e^t (c_1 \cos t + c_2 \sin t) + te^t$$

dir. $t = \ln x$ den Euler denkleminin genel çözümü

$$y = x (c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x)) + x \ln x$$

olarak elde edilir.

Örnek 2. $\left(x^3 D^3 + 2x^2 D^2\right) y = x + \sin(\ln x)$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. $x = e^t$ değişken değişmesi yapılırsa

$$xD = D_1 \quad , \quad x^2 D^2 = D_1 (D_1 - 1) \quad , \quad x^3 D^3 = D_1 (D_1 - 1)(D_1 - 2)$$

olur. Bunlar denklemde yerine yazılırsa

$$\left(D_1^3 - D_1^2\right) y = e^t + \sin t$$

sabit katsayılı lineer homogen olmayan denklem elde edilir. Bu denkleme ilişkin homogen denklem

$$\left(D_1^3 - D_1^2\right) y = 0$$

olup bu denklemin genel çözümü

$$y_h(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^t$$

dir. Operatör yönteminden özel çözüm ise

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \frac{1}{D_1^2 (D_1 - 1)} e^t + \frac{1}{D_1^2 (D_1 - 1)} \sin t \\ &= e^t \frac{1}{D_1} 1 - \frac{1}{(D_1 - 1)} \sin t \\ &= te^t - \frac{D_1 + 1}{D_1^2 - 1} \sin t \\ &= te^t + \frac{1}{2} (D_1 + 1) \sin t \\ &= te^t + \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t \end{aligned}$$

olarak bulunur. Sabit katsayılı denklemin genel çözümü

$$y = c_1 + c_2 t + c_3 e^t + te^t + \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t$$

olup $t = \ln x$ yerine yazılırsa Euler denkleminin genel çözümü

$$y = c_1 + c_2 \ln x + c_3 x + x \ln x + \frac{1}{2} \cos(\ln x) + \frac{1}{2} \sin(\ln x)$$

olarak elde edilir.

Örnek 3. $\left(2x^2D^2 - xD + 1\right)y = x^2$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Örnek 4. $\left(x^2D^2 - 4xD + 6\right)y = \dfrac{42}{x^4}$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.