2. GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALLER İÇİN YAKINSAKLIK TESTLERİ

Birinci Çeşit Genelleştirilmiş İntegraller İçin Yakınsaklık Testleri

a) Mutlak yakınsak her integral yakınsaktır. Yani

$$\int_a^b |f(x)|\, dx \text{ yakınsak} \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx \text{ yakınsaktır.}$$

Ancak tersi doğru değildir.

b) Karşılaştırma Testi

$[a, b)$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli f ve g fonksiyonları $0 \leq f(x) \leq g(x)$ eşitsizliğini sağlasın. Buradan

(1) $\int\limits_0^\infty g(x)\, dx$ integrali yakınsak $\Rightarrow \int\limits_0^\infty f(x)\, dx$ integrali yakınsaktır.

(2) $\int\limits_0^\infty f(x)\, dx$ integrali ıraksak $\Rightarrow \int\limits_0^\infty g(x)\, dx$ integrali ıraksaktır.

c) Karşılaştırma Testinin Limit Formu

Pozitif tanımlı bir f fonksiyonu için $\lim\limits_{x\to\infty} x^p f(x) = c$ olsun. Eğer

(1) $0 \leq c < \infty$ ve $p > 1 \Rightarrow \int\limits_a^\infty f(x)\, dx$ integrali yakınsaktır.

(2) $0 < c \leq \infty$ ve $p \leq 1 \Rightarrow \int\limits_a^\infty f(x)\, dx$ integrali ıraksaktır.

d) Abel Testi

φ, $[a, \infty)$ aralığı üzerinde sürekli ve aynı aralık üzerinde sürekli türeve sahip bir fonksiyon olsun. Eğer

1) $\Phi(x) = \int\limits_a^x \varphi(t)\, dt$, $[a, \infty)$ aralığında sınırlı ve

2) g monoton azalan ve $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$

oluyorsa

$$\int_a^\infty \varphi(x)\, g(x)\, dx$$

integrali yakınsaktır.

Örnek 1. Aşağıdaki integrallerin yakınsaklık durumlarını inceleyiniz.

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$ **b)** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(4x^2+1)^2}}$ **c)** $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^2}dx$

Çözüm.

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+x^3}}$ ile tanımlı fonksiyon, her $x \geq 1$ için $[1,\infty)$ aralığının her alt aralığında integrallenebilirdir. O halde, verilen integral birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$x \geq 1$ için

$$\begin{aligned} x + x^3 &\geq x^3 \\ \sqrt{x+x^3} &\geq \sqrt{x^3} \\ \frac{1}{\sqrt{x+x^3}} &\leq \frac{1}{\sqrt{x^3}} \end{aligned}$$

olup $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx$ integrali $p = \dfrac{3}{2} > 1$ olduğundan harmonik seriden yakınsaktır. O halde, karşılaştırma testinden verilen integral yakınsaktır.

b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{(4x^2+1)^2}}$ ile tanımlı fonksiyon, her $x \geq 1$ için $[1,\infty)$ aralığının her alt aralığında integrallenebilirdir. O halde, verilen integral birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$x \geq 1$ için

$$\lim_{x\to\infty} x^{p=\frac{1}{3}} \frac{x}{\sqrt[3]{(4x^2+1)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4^2}}$$

olup $p = \dfrac{1}{3}$ ve $c = \dfrac{1}{2^{\frac{4}{3}}} < 1$ olduğundan limit testi gereğince verilen integral ıraksaktır.

c) $f(x) = e^{-x^2}$ ile tanımlı fonksiyon, her $x \geq 1$ için $[1, \infty)$ aralığının her alt aralığında integrallenebilirdir. O halde, verilen integral birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$x \geq 1$ için

$$\begin{aligned} x &\leq x^2 \\ -x &\geq -x^2 \\ e^{-x} &\geq e^{-x^2} \\ e^{-x^2} &\leq e^{-x} \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} \int_1^\infty e^{-x} dx &= \lim_{t\to\infty} \int_1^t e^{-x} dx \\ &= \lim_{t\to\infty} \left(-e^{-x} \Big|_1^t\right) \\ &= \frac{1}{3} \\ &< \infty \end{aligned}$$

olup $\int_1^\infty e^{-x} dx$ integrali yakınsaktır. Karşılaştırma testinden verilen integral yakınsaktır.

İkinci Çeşit Genelleştirilmiş İntegraller İçin Yakınsaklık Testleri

a) Karşılaştırma Testi

Pozitif tanımlı f fonksiyonunun tek singüler noktası b ve her $x \in [a, b)$ için $f(x) \leq g(x)$ olsun. O halde

(1) $\int_a^b g(x)\, dx$ integrali yakınsak $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\, dx$ integrali yakınsaktır.

(2) $\int_a^b f(x)\, dx$ integrali ıraksak $\Rightarrow$ $\int_a^b g(x)\, dx$ integrali ıraksaktır.

b) Limit Testi

Pozitif tanımlı f fonksiyonunun tek singüler noktası b ve $\lim\limits_{x\to b^-}(b-x)^p f(x)=\gamma$ ya da $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^p f($
γ olsun. O halde

(1) $0\le\gamma<\infty$ ve $p<1$ ise $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ integrali yakınsaktır.

(2) $0<\gamma\le\infty$ ve $p\ge 1$ ise $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ integrali ıraksaktır.

Örnek 2. Aşağıdaki integrallerin yakınsaklık durumlarını inceleyiniz.

a) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **b)** $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1-x^4}$ **c)** $\int\limits_2^3 \frac{dx}{x^2\left(x^3-8\right)\frac{2}{3}}$

Çözüm.

a) İntegrasyon aralığı sınırlı ve

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\infty$$

olup $x=1$ singüler nokta olmak üzere verilen integral ikinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

Her $x\in[0,1)$ için

$$\begin{aligned}
x^2 &\le x\\
1-x^2 &\ge 1-x\\
\sqrt{1-x^2} &\ge \sqrt{1-x}\\
\frac{1}{1-x^2} &\le \frac{1}{\sqrt{1-x}}
\end{aligned}$$

olup $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ integrali $p=\frac{1}{2}<1$ olduğundan yakınsaktır. Dolayısıyla, karşılaştırma testinden verilen integral yakınsaktır.

b) İntegrasyon aralığı sınırsız ve $x=1$ singüler nokta olduğundan verilen integral üçüncü çeşit genelleştirilmiş integraldir. Buradan

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{1-x^4} = \int_0^1 \frac{dx}{1-x^4} + \int_1^2 \frac{dx}{1-x^4} + \int_2^\infty \frac{dx}{1-x^4}$$

yazılabilir. O halde $I_1 := \int_0^1 \frac{dx}{1-x^4}$ integraline limit testi uygulanırsa

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x)^p \frac{1}{1-x^4} = \lim_{x\to 1^-} (1-x)^p \frac{1}{(1-x)(1+x)(1+x^2)} = \gamma$$

olup $p = 1$ için $\gamma = \frac{1}{4}$ bulunur. $\gamma < 1$ olduğundan limit testi gereğince I_1 integrali ıraksak olarak bulunur. Dolayısıyla I integrali ıraksaktır.

c) İntegrasyon aralığı sınırlı ve $x = 2$ singüler nokta olduğundan verilen integral ikinci çeşit genelleştirilmiş integraldir. Limit testi uygulanırsa

$$\lim_{x\to 2^+} (x-2)^p \frac{1}{x^2 (x-2)^{\frac{2}{3}} (x^2+2x+4)^{\frac{2}{3}}} = \gamma$$

olup $p = \frac{2}{3}$ için $\gamma = 0$ bulunur. Limit testi gereğince de verilen integral yakınsaktır.