4. VEKTÖR DEĞERLİ FONKSİYONLARIN LİMİTİ, SÜREKLİLİĞİ, TÜREVİ VE İNTEGRALLERİ

Vektör Değerli Fonksiyon

$D \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $\begin{array}{rl} f: & D \to \mathbb{R} \\ & t \to f(t) \end{array}$ ile tanımlı f reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonları inceledik.

Yine V bir vektör uzay olmak üzere,

$D \subseteq \mathbb{R}$, $\begin{array}{rl} F: & D \to V \\ & t \to \overrightarrow{f}(t) \end{array}$ ile tanımlı fonksiyona reel değişkenli ve vektör değerli fonksiyon denir.

Vektör değerli fonksiyonları büyük harfle göstereceğiz ve çoğu kez V yerine $\mathbb{R}^3$ alacağız.

Örnek 1. $F(t) = \ln t\,\overrightarrow{i} + e^t\,\overrightarrow{j} + \sqrt{1-t^2}\,\overrightarrow{k}$ ile tanımlı fonksiyon için D_f'i bulunuz.

Çözüm. $f_1(t) = \ln t \Longrightarrow D_{f_1} = \{t \in \mathbb{R} : t > 0\} = (0, \infty)$

$f_2(t) = e^t \Longrightarrow D_{f_2} = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

$$
\begin{aligned}
f_3(t) = \sqrt{1-t^2} \Longrightarrow D_{f_3} &= \{t \in \mathbb{R} : 1 - t^2 \geq 0\} \\
&= \{t \in \mathbb{R} : -1 \leq t \leq 1\} \\
&= [-1, 1]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap D_{f_3} &= (0, \infty) \cap (-\infty, \infty) \cap [-1, 1] \\
&= (0, 1]
\end{aligned}
$$

Tanım 1. F ile G vektör değerli ve h ile u reel değerli fonksiyonlar olmak üzere,

1) $(F \mp G)(t) = F(t) \mp G(t)$

2) $(F.G)(t) = F(t).G(t)$

3) $(F\text{x}G)(t) = F(t)\text{x}G(t)$

4) $(hF)(t) = h(t)\,F(t)$

5) $(Fou)(t) = F(u(t))$

ile tanımlanır.

Örnek 2. $\overrightarrow{F}(t) = \sin t\,\overrightarrow{i} - \cos t\,\overrightarrow{j} + t\,\overrightarrow{k}$

$\overrightarrow{G}(t) = \cos t\,\overrightarrow{i} - \sin t\,\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$

$h(t) = \sqrt{t}$

$u(t) = t^2$

fonnksiyonları verilsin. Yukarıdaki tanımda geçen özellikleri sağladığını gösteriniz.

Çözüm. 1)
$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{F} \mp \overrightarrow{G}\right)(t) &= \overrightarrow{F}(t) \mp \overrightarrow{G}(t) \\ &= (\sin t \mp \cos t)\,\overrightarrow{i} + (-\cos t \mp \sin t)\,\overrightarrow{j} + (t \mp 1)\,\overrightarrow{k}\end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{F}.\overrightarrow{G}\right)(t) &= \overrightarrow{F}(t)\,.\overrightarrow{G}(t) \\ &= \sin t\cos t + (-\sin t)(-\cos t) + t \\ &= 2\sin t\cos t + t\end{aligned}$$

3)
$$\left(\overrightarrow{F}\text{x}\overrightarrow{G}\right)(t) = \overrightarrow{F}(t)\text{x}\overrightarrow{G}(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \sin t & -\cos t & t \\ \cos t & -\sin t & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (-\cos t + t\sin t)\,\overrightarrow{i} - (\sin t - t\cos t)\,\overrightarrow{j} + \left(-\sin^2 t + \cos^2 t\right)\overrightarrow{k}$$

4)
$$\begin{aligned}(hF)(t) &= h(t)\,F(t) \\ &= \sqrt{t}\left(\sin t\,\overrightarrow{i} - \cos t\,\overrightarrow{j} + t\,\overrightarrow{k}\right) \\ &= \sqrt{t}\sin t\,\overrightarrow{i} - \sqrt{t}\cos t\,\overrightarrow{j} + t\sqrt{t}\,\overrightarrow{k}\end{aligned}$$

5)
$$\begin{aligned}(Fou)(t) &= F(u(t)) \\ &= F(t^2) \\ &= \sin(t^2)\,\overrightarrow{i} - \cos(t^2)\,\overrightarrow{j} + t^2\,\overrightarrow{k}\end{aligned}$$

Tanım 2. $F(t) = f_1(t)\overrightarrow{i} + f_2(t)\overrightarrow{j} + f_3(t)\overrightarrow{k}$ olmak üzere, $F(t)$'nin normu,

$$\begin{aligned}\sqrt{F(t)\,F(t)} &= \sqrt{(f_1(t))^2 + (f_2(t))^2 + (f_3(t))^2} \\ &= \|F(t)\|\end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır.

Örnek 3. $F(t) = \sin t\,\overrightarrow{i} - \cos t\,\overrightarrow{j} + t\,\overrightarrow{k}$ vektör değerli fonksiyonu verilmiş olsun.

$$\begin{aligned}\|F(t)\| &= \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + t^2} \\ &= \sqrt{1 + t^2}\end{aligned}$$

Tanım 3. $\overrightarrow{F}$ ile $\overrightarrow{G}$ vektör değerli fonksiyonları D üzerinde ortogonaldir (diktir) $\Longleftrightarrow \forall t \in D$ için $F(t).G(t) = 0$ sağlanır.

$\overrightarrow{F}$ fonksiyonu $\overrightarrow{G}$ fonksiyonuna dikse $F \perp G$ ile gösterilir.

Örnek 4. $F(t) = (t - t^2)\overrightarrow{i} + (1 + 3t)\overrightarrow{j} - 2t\overrightarrow{k}$
$G(t) = (1 - 2t)\overrightarrow{i} + t\overrightarrow{j} + (1 + t^2)\overrightarrow{k}$

vektör değerli fonksiyonları $\mathbb{R}$ üzerinde ortogonal midir?

Çözüm. $\forall t \in \mathbb{R},\ F(t).G(t) = (t - k^2)(1 - 2t) + (1 + 3t)\,t + (-2t)(1 + t^2)$
$= 0$

O halde $F \perp G$ $(\mathbb{R}\ üzerinde)$.

Vektör Değerli Fonksiyonların Limit ve Sürekliliği

Tanım 4. $D \subseteq \mathbb{R}$ ve $F : D \to \mathbb{R}^3$ vektör değerli fonksiyon olmak üzere $t_0 \in D'$ olsun, burada D', D'nin yığılma noktaları kümesidir. F fonksiyonunun t_0 noktasında bir L vektör limitine sahip olması için $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0) \ni 0 < |t - t_0| < \delta$ eşitsizliğini gerçekleyen her $t \in D$

için $\left\|\overrightarrow{F}(t)-\overrightarrow{L}\right\|<\varepsilon$ olmasıdır. Bu durumda $\lim\limits_{t\to t_0}\overrightarrow{F}(t)=\overrightarrow{L}$ sağlanır.

Tanım 5. $D\subseteq\mathbb{R}$ ve $F:D\to\mathbb{R}^3$ vektör değerli fonksiyon olmak üzere $\overrightarrow{F}(t)=f_1(t)\overrightarrow{i}+f_2(t)\overrightarrow{j}+f_3(t)\overrightarrow{k}$ verilsin ve $t_0\in D'$ olsun.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0}\overrightarrow{F}(t) &= \underbrace{\left(\lim_{t\to t_0}f_1(t)\right)}_{a}\overrightarrow{i}+\underbrace{\left(\lim_{t\to t_0}f_2(t)\right)}_{b}\overrightarrow{j}+\underbrace{\left(\lim_{t\to t_0}f_3(t)\right)}_{c}\overrightarrow{k}\\ &= \overrightarrow{L}\\ &= a\overrightarrow{i}+b\overrightarrow{j}+c\overrightarrow{k}\end{aligned}$$

sağlanır.

Örnek 5. $\overrightarrow{F}(t)=e^t\overrightarrow{i}+\frac{\sin t}{t}\overrightarrow{j}+\frac{t+3}{-t+2}\overrightarrow{k}$ vektör değerli bir fonksiyon olmak üzere $\overrightarrow{L}=\lim\limits_{t\to\infty}\overrightarrow{F}(t)=?$

Çözüm.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\overrightarrow{F}(t) &= \left(\lim_{t\to 0}e^t\right)\overrightarrow{i}+\left(\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\right)\overrightarrow{j}+\left(\lim_{t\to 0}\frac{t+3}{-t+2}\right)\overrightarrow{k}\\ &= 1\overrightarrow{i}+1\overrightarrow{j}+\tfrac{3}{2}\overrightarrow{k}\\ &= \overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\tfrac{3}{2}\overrightarrow{k}\end{aligned}$$

Teorem 1. F ile G vektör değerli fonksiyon ve $\lim\limits_{t\to t_0}\overrightarrow{F}(t)=\overrightarrow{L_1}$, $\lim\limits_{t\to t_0}\overrightarrow{G}(t)=\overrightarrow{L_2}$ olsun. O halde,

$$a)\ \lim_{t\to t_0}\left(\overrightarrow{F}(t)\mp\overrightarrow{G}(t)\right)=\overrightarrow{L_1}\mp\overrightarrow{L_2}$$
$$b)\ \lim_{t\to t_0}\left(\overrightarrow{F}(t).\overrightarrow{G}(t)\right)=\overrightarrow{L_1}.\overrightarrow{L_2}$$
$$c)\ \lim_{t\to t_0}\left(\overrightarrow{F}(t)\,\mathrm{x}\overrightarrow{G}(t)\right)=\overrightarrow{L_1}\mathrm{x}\overrightarrow{L_2}$$

sağlanır.

Örnek 6. $\overrightarrow{F}(t)=\cos t\,\overrightarrow{i}+\sin t\,\overrightarrow{j}+t\,\overrightarrow{k}$
$\overrightarrow{G}(t)=\sin t\,\overrightarrow{i}+\cos t\,\overrightarrow{j}+(t-1)\,\overrightarrow{k}$

vektör değerli fonksiyonları kullanarak yukarıdaki tanım özelliklerini gösteriniz.

Çözüm. a) $\lim_{t\to 0}\left(\overrightarrow{F}(t)\mp\overrightarrow{G}(t)\right)=\overrightarrow{L_1}\mp\overrightarrow{L_2}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$

b) $\lim_{t\to t_0}\left(\overrightarrow{F}(t).\overrightarrow{G}(t)\right)=\overrightarrow{L_1}.\overrightarrow{L_2}=0$

c) $$\lim_{t\to t_0}\left(\overrightarrow{F}(t)\,\mathrm{x}\overrightarrow{G}(t)\right)=\overrightarrow{L_1}\mathrm{x}\overrightarrow{L_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$$

Tanım 6. $D\subseteq\mathbb{R}$ ve $F:D\to\mathbb{R}^3$ vektör değerli fonksiyon olsun. F, $t_0\in D'$ noktasında sürekli $\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\delta(\varepsilon,t_0)>0\ \ni|t-t_0|<\delta$ özellikli her $t\in D$ için $\|F(t)-F(t_0)\|<\varepsilon$ sağlanır.

Not 1. $t_0\in D\cap D'$ olsun. O halde F fonksiyonu t_0'da sürekli $\Longleftrightarrow \lim_{t\to t_0}F(t)=F(t_0)$ sağlanır.

Örnek 7. $F:D\to\mathbb{R}^3$ olmak üzere $\overrightarrow{F}(t)=[|t|]\,\overrightarrow{i}+\dfrac{\sin t}{t}\overrightarrow{j}+e^t\,\overrightarrow{k}$ ile tanımlı vektör değerli fonksiyonu verilsin.

a) F, $t_0=0$ noktasında bir limite sahip midir?

b) F, $t_0=0$ noktasında sürekli midir?

Çözüm. $t_0=0\in\mathbb{R}\cap\mathbb{R}'$ ve $f_1(t)=[|t|]$; $\lim_{t\to 0^+}[|t|]=0$ ve $\lim_{t\to 0^-}[|t|]=-1$ olduğundan $\lim_{t\to 0}f_1(x)$ limiti mevcut değildir. O halde $\lim_{t\to 0}F(t)$ mevcut değildir.

Örnek 8. $F : D \to \mathbb{R}^3$ olmak üzere $\overrightarrow{F}(t) = (t^2+1)\overrightarrow{i} + \frac{\sin t}{t}\overrightarrow{j} + e^t\overrightarrow{k}$ ile tanımlı vektör değerli fonksiyonu verilsin.

a) $t_0 = 0$ noktasında limitini bulunuz.

b) $t_0 = 0$ noktasında F, sürekli midir?

Çözüm. a) $t_0 = 0 \in \mathbb{R} \cap \mathbb{R}'$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} F(t) &= \left(\lim_{t\to 0}(t^2+1)\right)\overrightarrow{i} + \left(\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\right)\overrightarrow{j} + \left(\lim_{t\to 0} e^t\right)\overrightarrow{k} \\ &= \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\end{aligned}$$

b) $f_1(t) = t^2+1$ olmak üzere f_1, $t = 0$'da süreklidir.

$f_2(t) = \frac{\sin t}{t}$ olmak üzere f_2, $t = 0$'da tanımsız olduğundan sürekli değildir.

O halde F fonksiyonu, $t = 0$'da sürekli değildir.

Not 2. Burada yine belirtelim ki F vektör değierli fonksiyonunun sürekli olması için yeter ve gerek şart her bir bileşen fonksiyonun sürekli olmasıdır.

Teorem 2. F ve G vektör değerli fonksiyonlar olmak üzere, F, G t_0 noktasında sürekli oluyorlarsa $F+G$, $F.G$, $F\mathrm{x}G$ fonksiyonları da t_0 noktasında süreklidir.

Vektör Değerli Fonksiyonların Türevi

Tanım 7. $D \subseteq \mathbb{R}$ ve $F : D \to \mathbb{R}^3$, $t_0 \in D \cap D'$ olsun. Eğer,

$$\lim_{t\to t_o}\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}$$

limiti varsa F, t_0'da türevlidir denir ve $F'(t_0)$ veya $\frac{df}{dt}(t_0)$ ile gösterilir.

Tanım 8. F'nin t_0 noktasında türevli$\Longleftrightarrow$ f_1, f_2, f_3 bileşen fonksiyonlarının t_0'da türevli olmasıdır. Bu durumda;

$$F'(t) = f_1'(t_0)\, i + f_2'(t_0)\, j + f_3'(t_0)\, k$$

gerçeklenir.

Örnek 9. $F(t) = |t|\, i + \cos t j + \sin t k$ ile verilen fonksiyon $t = 0$ noktasında türevli midir?

Çözüm. $f_1(t) = |t|$, $f_2(t) = \cos t$, $f_3(t) = \sin t$

$f_1(t) = |t|$ ile tanımlı fonksiyon $t = 0$'da türevli değildir. O halde F, $t = 0$'da türevli değildir.

Teorem 3. F ve G vektör değerli fonksiyonları t noktasında türevli ve h fonksiyonu da t noktasında türevli ise

1) $(F(t) \mp G(t))' = F'(t) \mp G'(t)$
2) $(F(t).G(t))' = F'(t).G(t) + F(t).G'(t)$
3) $(F(t) \mathrm{x} G(t))' = F'(t) \mathrm{x} G(t) + F(t) \mathrm{x} G'(t)$
4) $(h(t) F(t))' = h'(t) F(t) + h(t) F'(t)$

Örnek 10. $F(t) = i - t^2 j + tk$ ve $G(t) = ti + (1+t) j + (t^2+1) k$ fonksiyonları verilsin.

$F(t).G(t) = t - t^2(t+1) + t(t^2+1) = 2t - t^2$

$$F(t) \mathrm{x} G(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -t^2 & t \\ t & 1+t & t^2+1 \end{vmatrix} = [(-t^4 - 2t^2 - t)\, i - j + (1 + t + t^3)\, k]$$

$$\begin{aligned} (F(t) \mathrm{x} G(t))' &= (-4t^3 - 4t - 1)\, i + 0j + (1 + 3t^2)\, k \\ &= (-4t^3 - 4t - 1)\, i + (1 + 3t^2)\, k \end{aligned}$$

Teorem 4. F fonksiyonu (a, b) aralığının her noktasında türevli ve de; $\|F(t)\| = c$ $(sabit)$ olsun. O halde, $F \perp F'$ gerçeklenir.

Vektör Değerli Fonksiyonların Türevinin Geometrik Yorumu

Eğer $t > t_0 \Longrightarrow \dfrac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}$ vektörü, $\overrightarrow{P_0P}$ vektörü ile aynı yönlüdür.

Eğer $t < t_0 \Longrightarrow \dfrac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}$ vektörü, $\overrightarrow{P_0P}$ vektörü ile ters yönlüdür.

Dolayısıyla $F'(t_0)$ mevcut ise bu vektör, P_0'dan geçen ve $\overrightarrow{P_0P}$ kiriş vektörü limiti olan bir vektördür ve eğri ile aynı yönlüdür. Eğer $\left\|F'(t_0)\right\| \neq 0$ ise

$$\begin{aligned} T(t_o) &= \frac{F'(t_0)}{\|F'(t_0)\|}, \ t_0 \text{ noktasındaki teğet vektör} \\ N(t) &= \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}, \ t \text{ parametreli noktadaki normal vektördür.} \end{aligned}$$

Örnek 11. $\overrightarrow{r}(t) = \cos t\,\overrightarrow{i} + \cos t\,\overrightarrow{j} + \sqrt{2}\sin t\,\overrightarrow{k}$ eğrisine $t = \dfrac{\pi}{4}$ noktasından çizilen (birim) teğet ve normal vektörü bulunuz.

Çözüm. $r'(t) = -\sin ti - \sin tj + \sqrt{2}\cos tk$

$\left\|r'(t)\right\| = \sqrt{\sin^2 t + \sin^2 t + 2\cos^2 t} = \sqrt{2}$

$T(t) = \dfrac{r'(t)}{\|r'(t)\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sin ti - \sin tj + \sqrt{2}\cos tk\right)$

$$\begin{aligned} T\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sin\frac{\pi}{4}i - \sin\frac{\pi}{4}j + \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}k\right) \\ &= -\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j + \frac{1}{\sqrt{2}}k \end{aligned}$$

Normal vektör için; $T'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-\cos i - \cos j + \sqrt{2}\sin tk\right)$ olup

$$\left\|T'(t)\right\| = \sqrt{\frac{1}{2}\left(2\cos^2 t + 2\sin^2 t\right)} = 1.$$

$N(t) = \dfrac{T'(t)}{\|T'(t)\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-\cos ti - \cos tj + \sqrt{2}\sin tk\right)$

$N\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{2}i - \dfrac{1}{2}j - \dfrac{1}{2}k$

Burada $r(t) - r(t_0)$ yer değiştirme vektörüdür. t_0 anındaki hız;

$$V(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{r(t) - r(t_0)}{t - t_0} = r^{'}(t_0) \text{ ve } \|V(t_0)\| \text{ hızın büyüklüğüdür.}$$

Ödev 1. $r(t) = 2(t - \sin t)\, i + 2(1 - \cos t)\, j - 0k$ verilsin.

a) Hız hangi zamanlarda sıfır olur?

b) İvmenin sıfır olduğu bir zaman var mıdır?

Tanım 5.4.5: $I \in \mathbb{R}$ bir aralık ve r, I üzerinde tanımlı bir vektör değerli fonksiyon olsun. Eğer I üzerinde sürekli türeve sahip ve de I'nın her bir t iç noktası için $r^{'}(t) \neq 0$ ise r, I üzerinde "düzgün bir fonksiyondur" denir. O halde r'nin temsil ettiği eğri "düzgün eğri" demektir.

Uzay Eğrilerinin Uzunlukları

C düzgün bir eğri olmak üzere $r(t) = X(t)\,i + Y(t)\,j + Z(t)\,k$, $a \leq t \leq b$ olsun.

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{\left((X'(t))^2 + (Y'(t))^2 + (Z'(t))^2\right)} \\ &= \int_a^b \left\| r'(t) \right\| dt \end{aligned}$$

Örnek 12. $r(t) = 4\cos t i + 4\sin t j + 3tk$, $0 \leq t \leq 2\pi$ eğri parçasının uzunluğunu hesaplayınız.

Çözüm. $r'(t) = -4\sin t i + 4\cos t j + 3k \Longrightarrow \left\| r'(t) \right\| = \sqrt{16\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) + 9} = 5$

$$L = \int_0^{2\pi} \left\| r'(t) \right\| dt = 5\int_0^{2\pi} dt = 10\pi$$