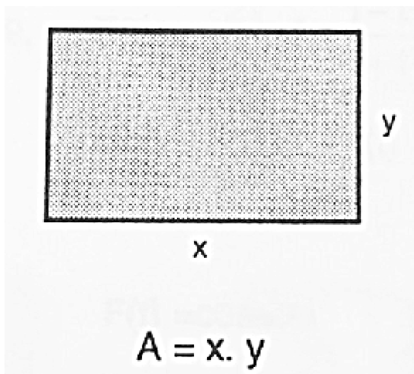
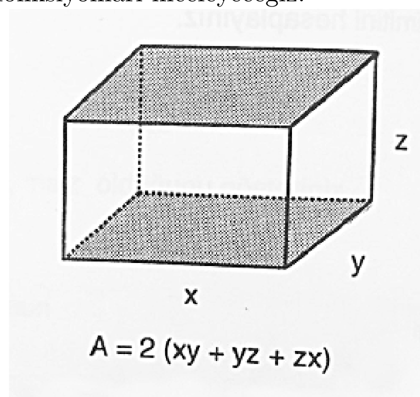
6. BÖLÜM: ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

6.1. Giriş

Şimdiye kadar reel değerli ve vektör değerli fonksiyonları inceledik. Şimdi aşağıda örnekleri verildiği gibi çok değişlenli fonksiyonları inceleyeceğiz.



$A = xy = A(x,y)$



$A = 2(xy + yz + xz) = A(x,y,z)$

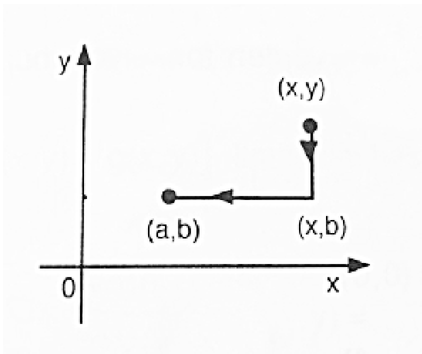
Tanım 6.1.1: $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\begin{array}{rll} f: & D & \to \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, ..., x_n) & \to u = f(x_1, x_2, ..., x_n) \end{array}$
n değişkenli fonksiyondur.
$n = 1$ için tek değişkenli fonksiyondur.
$n \geq 2$ için çok değişkenli fonksiyondur.

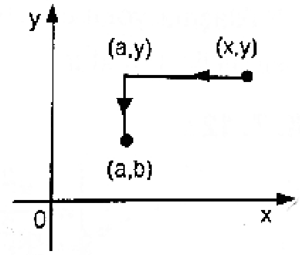
6.2. Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Limit ve Süreklilik

Tanım 6.2.1: $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ve $\begin{array}{rl} F: & D \to \mathbb{R} \\ & (x,y) \to z = f(x,y) \end{array}$ fonksiyonu verilsin.

$(a,b) \in D'$ olmak üzere, $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} F(x,y) = L \iff \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \ni D$'nin (a,b) noktasının δ komşuluğundaki her (x,y) elemanı için $|f(x,y) - L| < \varepsilon$ gerçeklenir.

Sonuç 6.2.2: $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$, $z = f(x,y)$, $(a,b) \in D'$ verilsin. O halde; $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \iff \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 \ni |x-a| < \delta$ ve $|y-b| < \delta$ özellikli $\forall(x,y) \in D$ için $|f(x,y) - L| < \varepsilon$ sağlanır.





$$\lim_{x\to a}\left\{\lim_{y\to b} f(x,y)\right\} = L_1 \qquad \lim_{y\to b}\left\{\lim_{x\to a} f(x,y)\right\} = L_2$$

Eğer, $\lim f(x,y) = L$ mevcut ise $L_1 = L_2 = L$ sağlanır. Diğer yandan L_1 ve L_2 mevcut ise $L_1 = L_2$ olsa bile (a,b) noktasında limit olmak zorunda değildir. Ayrıca L_1 ve L_2 mevcut fakat $L_1 \neq L_2$ ise o zaman $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ limiti mevcut değildir.

Örnek 1: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ limiti mevcut mudur?

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right\} = \lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right\} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0 = L_1$

$\lim\limits_{y\to 0}\left\{\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right\} = \lim\limits_{y\to 0}\left\{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right\} = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0 = L_2$

$L_1 = L_2 = 0$ sağlandı.

$y = mx$ doğruları boyunca $(0,0)$ noktasına yaklaşalım:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,xmx)\to(0,0)} \frac{xmx}{x^2+(xm)^2} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{x^2(1+m^2)} \\ &= \frac{m}{(1+m^2)} \end{aligned}$$

O halde m değiştikçe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ farklı değerler alır. Bu yüzden limit yoktur.

Tanım 6.2.3: $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ ve $z = f(x,y)$ olsun. Ayrıca $(a,b) \in D$ verilsin. Eğer $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0 \ni |x-a| < \delta$ ve $|y-b| < \delta$ olacak biçimde $\forall (x,y) \in D$ için $|f(x,y) - f(a,b)| < \varepsilon$ ise f, (a,b) noktasında süreklidir.

Ayrıca $(a,b) \in D \cap D'$ olması halinde, f (a,b) noktasında sürekli $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ sağlanır.

Örnek 3: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ fonksiyonu $(0,0)$ noktasında sürekli midir?

Çözüm: F fonksiyonu $(0,0)$ noktasında tanımlı olmadığından süreksizdir.

6.3. Kısmi Türevler

Tanım 6.3.1: $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$, $z = f(x,y)$ ve $(a,b) \in D \cap D^{'}$ olsun. Eğer

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} = L_1$$

limiti varsa F, (a,b) noktasında x değişkenine göre kısmi türeve sahiptir. $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(a,b)}$, $f_x(a,b)$ notasyonlarından biri ile gösterilir. Eğer,

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k} = L_2$$

limiti varsa f, (a,b) noktasında y'ye göre kısmi türeve sahiptir denir ve $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$, $\frac{\partial f}{\partial y}|_{(a,b)}$, $f_y(a,b)$ notasyonlarından biri ile gösterilir.

Örnek 4: $z = f(x,y) = x^2 + y^2 - 3xy$ fonksiyonu ve $(1,2)$ noktası verilsin. $F_x(1,2)$ ve $F_y(1,2)$ değerlerini bulunuz.

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h,2) - f(1,2)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 + 4 - 3(1+h)2 - (1+4-6)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 + 4 - 6 - 6h + 1}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h(h-4)}{h} = -4 = f_x(1,2) \\
\lim_{k \to 0} \frac{f(1,2+k) - f(1,2)}{k} &= \lim_{k \to 0} \frac{1 + (2+k)^2 - 3(2+k) - 1 + 4 + -1.2.3}{k} \\
&= \lim_{k \to 0} \frac{5 + 4k + k^2 - 6 - 3k + 1}{k} \\
&= \lim_{k \to 0} \frac{k(1+k)}{k} \\
&= 1 = f_y(1,2)
\end{aligned}$$

Örnek 5: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+y^2} & ;(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ;(x,y) = (0,0) \end{cases}$ eğer varsa $f_x(0,0)$ ve $f_y(0,0)$ değerlerini bulunuz.

Çözüm:
$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h}{h^2+0} - 0}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^2} = \infty
\end{aligned}$$

O halde $f(x,y)$ fonksiyonu $(0,0)$ noktasında x'e göre kısmi türeve sahip değildir.

$$\begin{aligned}
\lim_{k \to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} &= \lim_{k \to 0} \frac{\frac{0}{k^2+0} - 0}{h} \\
&= \lim_{k \to 0} 0 = 0 = f_y(0,0)
\end{aligned}$$

Örnek 6: $f(x,y,z) = \arcsin\left(\dfrac{xy}{z}\right)$ fonksiyonu için;

$$f_x(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{xy}{z}\right)^2}}\frac{y}{z}$$

$$f_y(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{xy}{z}\right)^2}}\frac{x}{z}$$

$$f_z(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{xy}{z}\right)^2}}xy\left(-\frac{1}{z^2}\right)$$

türevleri birinci mertebeden kısmi türevlerdir.

$f_{xx} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

$f_{xy} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

$f_{yy} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

$f_{yx} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

türevleri ise ikinci mertebeden kısmi türevlerdir.

Örnek 7: $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}$ fonksiyonunun birinci ve ikinci mertebeden tüm kısmi türevlerini bulunuz.

$f_x = e^{\frac{x}{y}}$ ve $f_y = e^{\frac{x}{y}}\left(-\dfrac{1}{y^2}\right)$

$f_{xx} = e^{\frac{x}{y}}\left(\dfrac{1}{y^2}\right) + 0.e^{\frac{1}{y}}$

$f_{xy} = e^{\frac{x}{y}}\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)\dfrac{1}{y} + e^{\frac{x}{y}}\left(-\dfrac{1}{y^2}\right)$

$f_{yy} = e^{\frac{x}{y}}\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)\left(-\dfrac{x}{y^2}\right) + e^{\frac{x}{y}}\left(\dfrac{2x}{y^3}\right)$

$f_{yx} = e^{\frac{x}{y}}\dfrac{1}{y}\left(-\dfrac{x}{y^2}\right) + e^{\frac{x}{y}}\left(-\dfrac{1}{y^2}\right)$

Tanım 6.3.2: Eğer $f_x,\ f_y,\ f_{xy},\ f_{yx}$ kısmi türevleri (a,b) noktasını içeren açık bir bölgede tanımlı ve (a,b) noktasında sürekli iseler

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

sağlanır.

Örnek 8: $z = x^2 - y^2$ ise $z_{xx} + z_{yy} = 0$ denklemi gerçeklenir mi?

Çözüm: $z = x^2 - y^2 \Longrightarrow z_x = 2x,\ z_y = -2y,\ z_{xx} = 2,\ z_{yy} = -2$ yerine yazalım.

$z_{xx} + z_{yy} = 2 - 2 = 0$ bulunur.

6.4. Zincir Kuralı

Teorem 6.4.1: $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$, $z = f(x, y)$ sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca f_x, f_y kısmi türevleri mevcut ve sürekli olsun.

$\left.\begin{array}{r} x = g(u, v) \\ y = h(u, v) \end{array}\right\}$ ile tanımlı fonksiyonların u ve v'ye göre kısmi türevleri mevcut ise $z = f(g(u, v), h(u, v))$'nin de u ve v'ye göre kısmi türevleri vardır ve

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \end{aligned}$$

gerçeklenir.

Örnek 9: $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$ için $\left.\begin{array}{l} x = e^u \cos v \\ y = e^u \sin v \end{array}\right\}$ zincir kuralını kullanarak z_u ve z_v'yi bulunuz.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\ &= \frac{2}{x^2 + y^2} e^u \cos v + \frac{2y}{x^2 + y^2} e^u \sin v \\ &= \frac{2\left(e^u \cos v\right)\left(e^u \cos v\right)}{e^{2u}\left(\cos^2 v + \sin^2 v\right)} + \frac{2\left(e^u \sin v\right)\left(e^u \sin v\right)}{e^{2u}\left(\cos^2 v + \sin^2 v\right)} \\ &= 2\cos^2 v + 2\sin^2 v \\ &= 2 \end{aligned}$$