7.3 İki Katlı İntegrallerin Hesabı

Teorem 7.3.1 (Birinci Fubini Teoremi): $B = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$ ve $f : B \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun. Bu takdirde

$$\iint_B f(x, y)\, dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy$$

olur.

Örnek 1. $B = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 4\}$ bölgesi üzerinde $f(x, y) = 2xy^3$ fonksiyonunun iki katlı integralini hesaplayınız.

Çözüm.

$$\begin{aligned} \iint_B f(x, y)\, dA &= \int_0^4 \int_1^3 2xy^3 dx dy \\ &= \int_0^4 \left(\int_1^3 2xy^3 dx \right) dy \\ &= \int_0^4 \left(x^2 y^3 \right) \big|_1^3\, dy \\ &= \int_0^4 \left(9y^3 - y^3 \right) dy \\ &= \int_0^4 8y^2 dy \\ &= 512 \end{aligned}$$

olur. İntegrasyon sırasını değiştirirsek; yani önce y, sonra x değişkenine göre integral alınırsa sonuç değişmez. Gerçekten

$$\begin{aligned}\iint\limits_B f(x,y)\,dA &= \int\limits_1^3\int\limits_0^4 2xy^3dydx \\ &= \int\limits_1^3\left(\int\limits_0^4 2xy^3dy\right)dx \\ &= \int\limits_1^3 \frac{1}{2}xy^4\mid_0^4 dx \\ &= \int\limits_1^3 128xdx \\ &= 512\end{aligned}$$

olur. İntegrasyon sırası değiştirilirse; yani önce y, sonra x değişkenine göre integral alınırsa sonuç değişmez. Gerçekten

$$\begin{aligned}\iint\limits_B f(x,y)\,dA &= \int\limits_1^3\int\limits_0^4 2xy^3dydx \\ &= \int\limits_1^3\left(\int\limits_0^4 2xy^3dy\right)dx \\ &= \int\limits_1^3 \frac{1}{2}xy^4\mid_0^4 dx \\ &= \int\limits_1^3 128xdx \\ &= 512\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 7.3.2 (İkinci Fubini Teoremi): $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları sürekli, $\forall\ x \in [a,b]$ için $u(x) \leq v(x)$ ve $B = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ u(x) \leq y \leq v(x)\}$ olsun. $f : B \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ise

$$\iint\limits_B f(x,y)\,dA = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$$

sağlanır.

Örnek 2. $B = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 3, \ -2x \leq y \leq x^2+1\}$ bölgesi üzerinde

$$\iint\limits_{B} \frac{2y}{(x+1)^2} dA$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{B} \frac{2y}{(x+1)^2} dA &= \int_0^3 \int_{-2x}^{x^2+1} \frac{2y}{(x+1)^2} dydx \\
&= \int_0^3 \frac{y^2}{(x+1)^2} \Big|_{-2x}^{x^2+1} dx \\
&= \int_0^3 \frac{(x^2+1)^2 - 4x^2}{(x+1)^2} dx \\
&= \int_0^3 (x-1)^2 \, dx \\
&= 3
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 3. Aşağıdaki iki katlı integralleri hesaplayınız.

a) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^1 (4-x-y)\, dydx$ **b)** $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2} dydx$ **c)** $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x (x+y)\, dydx$ **d)** $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 x^2 e^{xy} dxdy$

Çözüm. a)

$$\int_0^2\int_0^1 (4-x-y)\,dydx = \int_0^2 \left(4y - xy - \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^1 \,dx$$
$$= \int_0^2 \left(\frac{7}{2} - x\right) dx$$
$$= \frac{7}{2}x - \frac{x^2}{2}\Big|_0^2$$
$$= 5$$

b)

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}dydx = \int_0^1 x^2 \arctan y\,\Big|_0^1 \,dx$$
$$= \int_0^1 x^2\left(\arctan 1 - \arctan 0\right)dx$$
$$= \int_0^1 x^2 \frac{\pi}{4}dx$$
$$= \frac{\pi}{4}\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{12}$$

c)

$$\int_0^1\int_0^x (x+y)\,dydx = \int_0^1 \left(xy + \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^x \,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{3}{2}x^2 dx$$
$$= \frac{1}{2}x^3\Big|_0^1$$
$$= \frac{1}{2}$$

d)

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_y^1 x^2e^{xy}dxdy &= \int_0^1\int_0^x x^2e^{xy}dydx \\
&= \int_0^1 xe^{xy}\mid_0^x dx \\
&= \int_0^1 \left(xe^{x^2}-x\right)dx \\
&= \left(\frac{1}{2}e^{x^2}-\frac{x^2}{2}\right)\mid_0^1 \\
&= \frac{e}{2}-1
\end{aligned}$$

7.4 İki Katlı İntegrallerde Bölge Dönüşümleri

Bölge dönüşümleri bölümünde belirtildiği gibi, $uv-$ düzlemindeki bir D bölgesi

$$\begin{cases} x = g(u,v) \\ y = h(u,v) \end{cases}$$

dönüşümü yardımıyla $xy-$ düzlemindeki bir B bölgesi üzerine bire bir olarak dönüştürülmüş olsun.

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

olmak üzere

$$\iint_B f(x,y)\,dxdy = \iint_D f(g(u,v),h(u,v))\,|J|\,dudv$$

eşitliği ile verilir. Eğer özel olarak

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

alınarak kutupsal koordinatlarına geçilirse

$$\iint_B f(x,y)\,dxdy = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta$$

olur. Çünkü bu dönüşüm için

$$J = \frac{\partial (x,y)}{\partial (r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

olarak bulunur.

Eğer $D = \{(r,\theta) : s(\theta) \le r \le t(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta\}$ ise

$$\iint\limits_B f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r dr d\theta = \int\limits_\alpha^\beta \int\limits_{s(\theta)}^{t(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r dr d\theta$$

olur.

Örnek 1 B bölgesi, köşeleri $(\pi,0)$, $(2\pi,\pi)$, $(\pi,2\pi)$, $(0,\pi)$ olan paralelkenar olduğuna göre

$$\iint\limits_B (x-y)^2 \sin^2(x+y)\, dxdy$$

integralini

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$$

dönüşümü yardımıyla hesaplayınız.

Çözüm.

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} x+y &= 3\pi \to v = \pi \\ x+y &= \pi \to v = \pi \\ y &= x+\pi \to u = -\pi,\ y = x-\pi \to u = \pi \end{aligned}$$

ve

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{1}{2}$$

olup

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_{B}(x-y)^2\sin^2(x+y)\,dxdy\\
&= \iint\limits_{D}u^2\sin^2 v\frac{1}{2}dudv\\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{\pi}^{3\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}u^2\sin^2 v\,dudv\\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{\pi}^{3\pi}\frac{u^3}{3}\,|_{-\pi}^{\pi}\sin^2 v\,dv\\
&= \frac{\pi^3}{3}\int\limits_{\pi}^{3\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 2v)\,dv\\
&= \frac{\pi^3}{6}\left(v-\frac{1}{2}\sin 2v\right)|_{\pi}^{3\pi}=\frac{\pi^4}{3}
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 2 B bölgesi, $5x^2+2xy+2y^2=1$ elipsi tarafından sınırlanan bölgedir.

$$\begin{cases} x=u+v\\ y=-2u+v\end{cases}$$

dönüşümü yardımıyla

$$I=\iint\limits_{B}\sqrt{5x^2+2xy+2y^2}dA$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.

$$x = u + v$$
$$y = -2u + v$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} 5(u+v)^2 + 2(u+v)(-2u+v) + 2(-2u+v)^2 &= 1 \\ 9\left(u^2+v^2\right) &= 1 \end{aligned}$$

ise

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{9}$$

çemberi elde edilir. Buradan

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

olup

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_B \sqrt{5x^2+2xy+2y^2}\,dA \\ &= \iint\limits_D \sqrt{9(u^2+v^2)}\,3\,du\,dv \\ &= 9\iint\limits_D \sqrt{u^2+v^2}\,du\,dv \end{aligned}$$

integrali elde edilir. Kutupsal koordinatlara geçilirse

$$\begin{aligned} I &= 9\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{3}} r.r\,dr\,d\theta \\ &= 9\int_0^{2\pi} \frac{r^3}{3}\Big|_0^{\frac{1}{3}}\,d\theta \\ &= 3\left(\frac{1}{27}\right)2\pi \\ &= \frac{2\pi}{9} \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 3 B bölgesi, $x^2+y^2=1$ ile $x^2+y^2=16$ çemberleri tarafından sınırlanan bölgedir.

$$I=\iint\limits_{B}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{4}}dA$$

integralini, kutupsal koordinatlar yardımıyla hesaplayınız.

Çözüm.

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

ve

$$\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(r,\theta\right)}=r$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{B}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{4}}dxdy &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_1^4\left(r^2\right)^{\frac{1}{4}}rdrd\theta \\
&= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_1^4 r^{\frac{3}{2}}drd\theta \\
&= \int\limits_0^{2\pi}\frac{2}{5}r^{\frac{5}{2}}\Big|_1^4\,d\theta \\
&= \frac{2}{5}\left(32-1\right)2\pi \\
&= \frac{124}{5}\pi
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

7.5 İki Katlı İntegrallerin Uygulamaları

A. Alan Hesabı

İki katlı integral tanımlarken, $(x_k, y_k) \in B_k$ için

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k = \iint\limits_B f(x,y)\,dxdy$$

olduğu verilmişti. Her $(x,y) \in B$ için $f(x,y) = 1$ olarak tanımlanırsa yukarıdaki eşitlik

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = \iint\limits_B dxdy$$

şeklini alır. Parçalanma nasıl yapılırsa yapılsın ΔA_k alanlarının toplamı B bölgesinin alanı olacağından

$$Alan\,(B) = \iint\limits_B dxdy$$

olur. Kutupsal koordinatlara geçildiğinde, Jakobiyen r olacağından

$$Alan\,(B) = \iint\limits_B r dr d\theta$$

olarak bulunur.

Örnek 1. $y = x^2$ eğrisi ve $y = 2x + 3$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin alanının hesaplayınız.

Çözüm.

$$\begin{aligned} x^2 &= 2x+3 \\ &\Longrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \\ &\Longrightarrow x_1 = 3,\, x_2 = -1 \end{aligned}$$

olup buradan

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{3}\int_{x^2}^{2x+3} dydx \\
&= \int_{-1}^{3} y \mid_{x^2}^{2x+3} dx \\
&= \int_{-1}^{3} \left(2x+3-3x^2\right) dx \\
&= \left(x^2+3x-\frac{1}{3}x^3\right) \mid_{-1}^{3} \\
&= \frac{32}{3}\ br^2
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

Örnek 2. $r = 12\cos 3\varphi$ gülünün bir yaprağının alanını bulunuz.

Çözüm.

$$r = 12\cos 3\varphi$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
A &= 2\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{6}}\int_{r=0}^{12\cos 3\theta} rdrd\theta \\
&= a\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} r^2 \mid_{0}^{12\cos 3\theta} d\theta = \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} 12^2\left(\frac{\cos 6\theta+1}{2}\right) d\theta \\
&= 72\left(\frac{\sin 6\theta}{6}+\theta\right) \mid_{0}^{\frac{\pi}{6}} \\
&= 12\pi
\end{aligned}
$$

bulunur.

Örnek 3. $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ lemniskatı tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm.

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

ise

$$r = 0 \Longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

olup buradan

$$\begin{aligned}
A &= 4 \iint\limits_B r dr d\theta \\
&= 4 \int\limits_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}} \int\limits_{r=0}^{a\sqrt{\cos 2\theta}} r dr d\theta \\
&= 2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\theta d\theta \\
&= 2a^2 \frac{\sin 2\theta}{2} \mid_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= a^2 \ br^2
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

B. Hacim Hesabı

f fonksiyonu B bölgesinde sürekli ve pozitif tanımlı ise

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

ifadesi, taban alanı ΔA_k, yüksekliği $f(x_k, y_k)$ olan dik prizmaların hacimleri toplamıdır. Eğer B bölgesi parçalanmanın normu sıfıra gidecek şekilde parçalanırsa bu hacimlerin toplamı, $z = f(x, y)$ denklemli yüzey, B bölgesi ve B bölgesini taban kabul eden dik silindir arasında kalan bölgenin V hacmine eşit olur. O halde

$$V = \iint\limits_B f(x, y) \, dx dy$$

olur.

Örnek 1. $a,\, b > 0$ dır. $xOy-$ düzlemi, $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ paraboloidi ve $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2\dfrac{x}{a}$ silindiri arasında kalan bölgenin hacmini hesaplayınız.

Çözüm.

$$V = \iint\limits_B \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dxdy$$

olmak üzere

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = r\cos\theta \\ \dfrac{y}{b} = r\sin\theta \end{cases}$$

denilirse, $J = abr$ ve $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2\dfrac{x}{a}$ eğrisi $r = 2\cos\varphi$ çemberine dönüşeceğinden

$$\begin{aligned} V &= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} r^2 abrdrd\varphi \\ &= 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} ab\frac{r^4}{4}\Big|_0^{2\cos\varphi}\, d\varphi \\ &= \frac{ab}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos\varphi + \cos^2 2\varphi\right) d\varphi \\ &= 2ab\left(\frac{3}{2}\varphi + \sin\varphi + \frac{1}{8}\sin 4\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{3}{2}\pi ab \end{aligned}$$

olur.

Örnek 1 $z = x + y$, $x = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$ düzlemleri tarafından sınırlanan bölgenin hacmini bulunuz.

Çözüm.

$$V = \iint\limits_B f(x, y)\, dxdy$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (x+y)\,dy dx \\
&= \int_0^1 \left(xy + \frac{1}{2}y^2\right) |_0^{1-x}\, dx \\
&= \int_0^1 \left[x - x^2 + \frac{1}{2}(1-x)^2\right] dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}(1-3)^3\right] |_0^1 \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

C. Kütle Hesabı

$x \circ y$ düzleminde, yoğunluğu $\sigma(x,y)$ olan bir levha B bölgesine yerleştiriliyor. σ yoğunluk fonksiyonu B üzerinde sürekli olsun. B nin herhangi bir parçalanması $P = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ ve B_k da alınan herhangi bir nokta (x_k, y_k) olsun. Herbir B_k bölgesine yerleştirilen levhanın kütlesi, yaklaşık olarak ΔA_k, B_k bölgesinin alanı olmak üzere $\sigma(x_k, y_k)\,\Delta A_k$ olur. Buna göre, bütün levhanın M kütlesi, yaklaşık olarak,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma(x_k, y_k)\,\Delta A_k$$

olur. P parçalanmasının normu ne kadar küçük olursa yaklaşık o derece iyi olur. Şu halde levhanın M kütlesi

$$M = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sigma(x_k, y_k)\,\Delta A_k$$

olacaktır. Sağ taraftaki limit $\iint\limits_B \sigma(x,y)\,dxdy$ integrali olduğundan

$$M = \iint\limits_B \sigma(x,y)\,dxdy$$

olarak bulunur. Eğer levha homogen, yani $\sigma(x,y) = k$ ise $M = k.A$ olur. Burada A, B bölgesinin alanıdır.

Örnek 1 5 cm yarıçaplı daire şeklindeki bir levhanın yoğunluğu, her noktada o noktanın daire merkezine olan uzaklığı ile orantılı olarak değişmektedir. Dairenin sınırı üzerinde yoğunluk 10 olduğuna göre bu levhanın kütlesini bulunuz.

Çözüm. (x,y) noktasındaki yoğunluk $\sigma(x,y) = k\sqrt{x^2+y^2}$ dir.

$x^2+y^2 = 25$ için $\sigma(x,y) = 10$ olduğundan

$$\begin{aligned} k\sqrt{25} &= 10 \\ 5k &= 10 \\ k &= 2 \end{aligned}$$

olup $\sigma(x,y) = 2\sqrt{x^2+y^2}$ dır. Buna göre

$$\begin{aligned} M &= \iint_B \sigma(x,y)\,dxdy \\ &= \iint_B 2\sqrt{x^2+y^2}dxdy \\ &= 2\int_0^{2\pi}\int_0^5 r.rdrd\varphi \\ &= 2\int_0^{2\pi} \frac{r^3}{3}\Big|_0^5\, d\varphi \\ &= \frac{500}{3}\pi \end{aligned}$$

olur.

D. Ağırlık Merkezinin Bulunması

(x,y) noktasındaki yoğunluğu $\sigma(x,y)$ olan ve xOy düzleminde bir B bölgesine yerleştirilen bir levhayı gözönüne alalım. B bölgesinin bir parçalanması $P = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ ve (x_k, y_k) da B_k

bölgesinde bir nokta olsun. B_k bölgesinde bulunan levhanın kütlesi, ΔA_k, B_k bölgesinin alanı olmak üzere, yaklaşık olarak $\sigma(x_k, y_k)\Delta A_k$ kadardır. Bu kütleyi (x_k, y_k) noktasına toplanmış gibi düşünebiliriz. Böyle noktalara **küresel nokta** adı verilir. Bilindiği gibi, bir küresel nokta sisteminin ağırlık merkezinin $\overline{x}$ ve $\overline{y}$ koordinatları

$$\overline{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k \sigma(x_k, y_k)\Delta A_k}{\sum_{k=1}^{n} \sigma(x_k, y_k)\Delta A_k}, \qquad \overline{y} = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k \sigma(x_k, y_k)\Delta A_k}{\sum_{k=1}^{n} \sigma(x_k, y_k)\Delta A_k}$$

biçiminde tanımlanır. $\sigma(x, y)$ sürekli olduğunda, yukarıdaki toplamlar birer integral olup $\|P\| \to 0$ için B üzerinde iki katlı integrale yaklaşır. Buna göre,

$$\overline{x} = \frac{\iint\limits_B x\sigma(x, y)\,dA}{\iint\limits_B \sigma(x, y)\,dA}, \qquad \overline{y} = \frac{\iint\limits_B y\sigma(x, y)\,dA}{\iint\limits_B \sigma(x, y)\,dA}$$

olur. Paydadaki integraller levhanın kütlesi olduğundan

$$\overline{x} = \frac{1}{M}\iint\limits_B x\sigma(x, y)\,dA, \qquad \overline{y} = \frac{1}{M}\iint\limits_B y\sigma(x, y)\,dA$$

yazılabilir. Eğer levhanın yoğunluğu sabit bir k değerine eşit, yani levha homogen ise, $M = k.A$ ve

$$\iint\limits_B xk\,dxdy = k\iint\limits_B x\,dxdy$$

olacağından

$$\overline{x} = \frac{1}{A}\iint\limits_B x\,dxdy, \qquad \overline{y} = \frac{1}{A}\iint\limits_B y\,dxdy$$

olarak yazılır. Burada A, levhanın alanını göstermektedir.

Örnek 1 $y^2 = 4x + 4$ ve $y^2 = -2x + 4$ parabolleri tarafından sınırlanan bölgeye yerleştirilen homogen levhanın ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm. Önce levhanın alanını bulalım.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{2}\int_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{\frac{1}{2}\left(4-y^2\right)} dxdy \\
&= 2\int_{0}^{2}\int_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{\frac{1}{2}\left(4-y^2\right)} dxdy \\
&= 2\int_{0}^{2} x \mid_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{\frac{1}{2}\left(4-y^2\right)} dy \\
&= \int_{0}^{2}\left(6-\frac{3}{2}y^2\right) dy \\
&= \left(6y-\frac{1}{2}y^3\right) \mid_0^2 \\
&= 8
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan

$$
\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{1}{A}\iint_{B} xdxdy \\
&= \frac{1}{8}\int_{-2}^{2}\int_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{\frac{1}{2}\left(4-y^2\right)} xdxdy \\
&= \frac{1}{8}\int_{-2}^{2}\frac{x^2}{2}\int_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{\frac{1}{2}\left(4-y^2\right)} dy \\
&= \frac{1}{16}\int_{-2}^{2}\left(\frac{3}{16}y^4-\frac{3}{2}y^2+3\right) dy \\
&= \frac{2}{5}
\end{aligned}
$$

olur. Bölge $Ox-$ eksenine göre simetrik ve levha homogen olduğundan $\overline{y}=0$ olacaktır. O halde ağırlık merkezi $M\left(\frac{2}{5},0\right)$ noktasıdır.