1. DİFERENSİYEL DENKLEMİN TANIMI VE SINIFLANDIRILMASI

Fen bilimleri ve mühendislikte birçok olayı açıklamak için matematiksel formüller veya matematiksel modeller kullanılır. Bu modeller ve formüller genellikle bir bilinmeyen fonksiyon ve onun türevini yada türevlerini içeren bir denklem olarak ortaya çıkar. Bir bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerini içeren böyle bir denkleme **diferensiyel denklem** denir. Bağımsız değişken sayısı bir ise bu denkleme **adi (bayağı) diferensiyel denklem**, bağımsız değişken sayısı birden fazla ise bu denkleme **kısmi türevli denklem** denir.

Bilinmeyen f fonksiyonunun $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ türevi, $y = f(x)$ fonksiyonunun bağımsız x değişkenine göre değişim oranı olduğundan değişen olayları tanımlamak için genellikle türev içeren denklemler kullanılır. Bunlara örnek olarak bir tel yada zarın titreşimi, radyoaktif bir maddenin bozunması, iletken bir çubuktaki ısı akımı, bir elektrik devresindeki akım, vb... verebiliriz.

Örnek1. y bağımlı değişken, x bağımsız değişken olmak üzere

$$\begin{aligned} y' &= e^x + 1 \\ (y')^2 - (\cos x)\, y &= 2x \\ xy'' - y' &= \sin x - 1 \end{aligned}$$

birer adi diferensiyel denklemdir. $z = z(x, y)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} xz_x + yz_y &= (y - x)\, z \\ z_{xx} + z_{yy} &= 1 \end{aligned}$$

denklemleri ise birer kısmi türevli denklemdir.

Tanım: Bir diferensiyel denklemde içerilen en yüksek basamaktan türevin basamak değerine **diferensiyel denklemin basamağı yada mertebesi** denir.

Bir diferensiyel denklem bilinmeyen fonksiyon ve türevlerine göre bir polinom denklem olarak yazılabiliyorsa denklemde kapsanan en yüksek basamaktan türevin kuvvetine **diferensiyel denklemin derecesi** denir.

Örnek 2. $(y')^2 - y = 2x$, y bağımlı, x bağımsız değişkenli 1. basamaktan, 2. dereceden denklemdir.

$u'' + u = \sin t + 1$, u bağımlı, t bağımsız değişkenli 2. basamaktan, 1. dereceden denklemdir.

n-yinci basamaktan lineer bir diferensiyel denklem

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = b(x)$$

formundadır. Burada a_i, $i = 0, 1, ..., n$ katsayıları sabit yada x değişkenine bağlı fonksiyonlardır. a_i, $i = 0, 1, ..., n$ katsayılarının hepsi sabit ise bu denklem

sabit katsayılı lineer denklem, bu katsayılardan en az biri x değişkeninin bir fonksiyonu ise **değişken katsayılı lineer denklem** olarak adlandırılır. $b(x) \equiv 0$ ise bu denklem **lineer homogen denklem**, $b(x) \neq 0$ ise **lineer homogen olmayan** diferensiyel denklem olarak adlandırılır.

Örnek 3.

$$\begin{aligned} y''' - y'' - y' + y &= e^{2x} \\ x^2y'' + 2xy' - 3x^2y &= x + 1 \\ x^2y'' + 2x(y')^2 - 3x^2y &= 0 \\ x^2yy'' + 2xy' - 3x^2y &= 0 \end{aligned}$$

Birinci denklem 3. basamaktan sabit katsayılı lineer homogen olmayan bir denklemdir. İkinci denklem 2. basamaktan değişken katsayılı lineer homogen olmayan bir denklemdir. Üçüncü ve dördüncü denklemler lineer değildir.

Diferensiyel Denklemin Çözümü: n-yinci basamaktan

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0 \tag{1}$$

adi diferensiyel denklemini ele alalım. f, $I \subset \mathbb{R}$ aralığında bütün x'ler için tanımlı ve n-yinci türeve sahip reel bir fonksiyon olsun. Her $x \in I$ için

$$F\left(x, f(x), f'(x), ..., f^{(n)}(x)\right) = 0$$

sağlanıyorsa $y = f(x)$ fonksiyonu I aralığında (1) denkleminin bir çözümüdür denir. f fonksiyonu denklemin basamağı kadar yani n tane keyfi sabit içeriyorsa bu çözüme **genel çözüm** denir. Genel çözümdeki keyfi parametrelerin özel seçimleriyle elde edilen çözümlere **özel çözüm** denir. Genel çözümden elde edilemeyen ancak denklemi sağlayan çözümlere de **aykırı, tekil** yada **singüler** çözüm denir.

Örnek 4. $y'' - y = 0$ diferensiyel denkleminin genel çözümü c_1 ve c_2 keyfi reel sabitler olmak üzere $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$ fonksiyonudur. $y = 2e^x$, $y = e^x + e^{-x}$ fonksiyonları da verilen denklemin birer özel çözümleridir.

Bir Eğri Ailesinin Diferensiyel Denkleminin Elde Edilmesi:

Bir eğri ailesini çözüm kabul eden diferensiyel denklemi elde etmek için çözüm fonksiyonundaki keyfi parametre sayısı kadar türev alınıp, çözüm fonksiyonu ve türevleri arasında keyfi sabitler yok edilir.

xoy düzleminde bir parametreli eğri ailesi $f(x, y, c) = 0$ olsun. Bu eğri ailesinin x bağımsız değişkenine göre bir kez türevi alınıp, türevi ve kendisi arasında c keyfi sabiti yok edilirse 1. basamaktan $F(x, y, y') = 0$ diferensiyel denklemi elde edilir. $c_1, c_2, ..., c_n$ keyfi parametrelerini içeren

$$f(x, y, c_1, c_2, ..., c_n) = 0$$

n parametreli eğri ailesinin diferensiyel denklemini bulmak için bu eğri ailesinin x bağımsız değişkeninine göre n kez türevi alınıp kendisi ile türevleri arasında keyfi parametreler yok edilerek n-yinci basamaktan $F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0$ diferensiyel denklemi elde edilir.

Örnek 5. $y^2 = 2cx + 1$ eğri ailesini çözüm kabul eden en düşük basamaktan diferensiyel denklemi bulunuz.

Çözüm. $y^2 = 2cx + 1$ eşitliğinin her iki yanının x bağımsız değişkenine göre türevi alınırsa

$$2yy' = 2c \rightarrow yy' = c$$

elde edilir. Bu ifade eğri ailesinin denkleminde yerine yazılırsa 1. basamaktan

$$y^2 = 2xyy' + 1$$

diferensiyel denklemi bulunur.

Başlangıç Değer ve Sınır Değer Problemi

Bir diferensiyel denklemin koşulları bağımsız değişkenin tek bir değerinde verilmişse koşullara diferensiyel denklemin başlangıç koşulları, diferensiyel denklemle birlikte başlangıç koşullarının oluşturduğu probleme **başlangıç değer problemi** denir. Koşullar bağımsız değişkenin birden çok değerinde verilmişse koşullara sınır koşulları, diferensiyel denklemle birlikte sınır koşullarının oluşturduğu probleme de **sınır değer problemi** denir.

Örnek 6.

$$y'' - xy' + 5y = 0 \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 1$$

bir başlangıç değer problemidir.

$$3y'' - y' + x^2 y = \sin x \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'(1) = 2$$

bir sınır değer problemidir.