2.6. Lineer Diferensiyel Denklemler

1. basamaktan lineer diferensiyel denklem

$$y' + p(x)\, y = q(x) \tag{1}$$

formundadır. (1) denklemi

$$[p(x)\, y - q(x)]\, dx + dy = 0$$

şeklinde yazıldığında bir tam denklem değildir, fakat

$$\lambda(x) = e^{\int p(x)dx}$$

formundaki bir integral çarpanına sahiptir. (1) denkleminin her iki tarafı bu $\lambda(x)$ integral çarpanı ile çarpılırsa

$$e^{\int p(x)dx} y' + e^{\int p(x)dx} p(x)\, y = e^{\int p(x)dx} q(x)$$

elde edilir. Buradan

$$\left(e^{\int p(x)dx} y\right)' = q(x)\, e^{\int p(x)dx}$$

olur. Her iki tarafın integrali alınırsa aşağıdaki çözümü verir:

$$\lambda(x)\, y = \int q(x)\, \lambda(x)\, dx + c$$

$$y(x) = \lambda^{-1}(x) \left(\int q(x)\, \lambda(x)\, dx + c \right). \tag{2}$$

Örnek 1.

$$y' + xy = x$$

denklemini çözünüz.

Çözüm.

İntegral çarpanı

$$\lambda(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int x dx} = e^{\frac{x^2}{2}}$$

dir. Denklemin her ik tarafı $e^{\frac{x^2}{2}}$ ile çarpılarak

$$e^{\frac{x^2}{2}} y' + x e^{\frac{x^2}{2}} y = x e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow \left(e^{\frac{x^2}{2}} y\right)' = x e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow \int \left(e^{\frac{x^2}{2}} y\right)' dx = \int x e^{\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\Rightarrow y e^{\frac{x^2}{2}} = e^{\frac{x^2}{2}} + c$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \left(e^{\frac{x^2}{2}} + c\right)$$

$$\Rightarrow y(x) = 1 + c e^{-\frac{x^2}{2}}$$

elde edilir.

Örnek 2.

$$\begin{cases} xy' + 3y = 2x^5 \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm. Denklem, $p(x) = \frac{3}{x}$ olmak üzere

$$y' + \frac{3}{x}y = 2x^4$$

olarak yazılsın. İntegral çarpanı $\lambda(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3\ln x} = x^3$ dür. Denklemi x^3 ile çarparsak

$$\begin{aligned} x^3y' + 3x^2y &= 2x^7 \\ \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(x^3y\right) &= 2x^7 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece, bu denklemde her iki tarafın integralini alırsak

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dx}\left(x^3y\right)dx &= 2\int x^7 dx \\ \Rightarrow x^3y &= \frac{x^8}{4} + c \\ \Rightarrow y(x) &= \frac{x^5}{4} + \frac{c}{x^3} \end{aligned}$$

olur.

$y(2) = 1$ koşulu uygulanırsa

$$y(2) = \frac{32}{4} + \frac{c}{8} = 1 \Rightarrow \frac{c}{8} = -7 \Rightarrow c = -56$$

elde edilir.

O halde $y(2) = 1$ koşulunu sağlayan çözüm

$$y(x) = \frac{x^5}{4} - \frac{56}{x^3}$$

dür.

Örnek 3.

$$\left(1 + x^2\right)y' + 4xy = \left(1 + x^2\right)^{-2} \quad , \quad y(0) = 1$$

başlangıç değer problemini çözünüz.

İlk olarak, denklemi normal formda tekrar yazalım:

$$y' + \frac{4x}{1 + x^2}y = \left(1 + x^2\right)^{-3} \quad , \quad p(x) = \frac{4x}{1 + x^2}.$$

İntegrasyon çarpanı $\lambda(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{4x}{1+x^2}dx} = e^{2\ln\left(1+x^2\right)} = \left(1+x^2\right)^2$ olduğundan her taraf $\lambda(x)$ ile çarpılarak

$$\begin{aligned}\left(\left(1+x^2\right)^2 y\right)' &= \left(1+x^2\right)^2\left(1+x^2\right)^{-3} \\ \Rightarrow y\left(1+x^2\right)^2 &= \int \left(1+x^2\right)^{-1} dx = \arctan x + c \\ \Rightarrow y(x) &= \frac{\arctan x + c}{\left(1+x^2\right)^2}\end{aligned}$$

elde edilir. $y(0) = 1$ başlangıç koşulundan

$$y(0) = \frac{0+c}{1} = c = 1 \Rightarrow y(x) = \frac{\arctan x + 1}{\left(1+x^2\right)^2}$$

bulunur.

Örnek 4. $\left(1+x^2\right)dy + (2xy - \tan x)\,dx = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{\tan x}{1+x^2} \qquad \text{(lineer denklem)}$$

denklemi için integral çarpanı

$$\lambda(x) = e^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx} = e^{\ln\left(1+x^2\right)} = 1+x^2$$

olmak üzere denklem $\lambda(x)$ ile çarpılarak integrali alınırsa

$$\begin{aligned}\lambda(x)\,y &= \int \frac{\tan x}{1+x^2}\left(1+x^2\right)dx + c \\ \Rightarrow \left(1+x^2\right)y &= -\ln(\cos x) + c \\ \Rightarrow y\left(1+x^2\right) &+ \ln(\cos x) = c\end{aligned}$$

elde edilir.

Problemler

Aşağıdaki diferensiyel denklemleri çözünüz.

a) $xy' - y = x^3 e^{-x}$, $x > 0$

b) $y' - y\tan x = \sin x$

c) $y' + y\tan x = 4x^3 \cos x$

d) $y' + \frac{1}{x\ln x}y = \frac{1}{\ln x}$

2.7. Bernoullli Diferensiyel Denklemi

Bernoulli diferensiyel denkleminin genel formu

$$y' + p(x)\, y = q(x)\, y^n \tag{1}$$

şeklindedir.

n nin 0 veya 1 olması durumunda sırasıyla değişkenlerine ayrılabilir ve lineer denklem durumu elde edilir.

$n \neq 0, 1$ durumunda bu denklemi çözmek için $z = y^{1-n}$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$y = z^{\frac{1}{1-n}} \quad \text{ve} \quad y' = \frac{1}{1-n} z^{\frac{n}{1-n}} z'$$

olur. Bu dönüşüm orjinal denklemi

$$\frac{1}{1-n} z^{\frac{n}{1-n}} z' + p(x)\, z^{\frac{1}{1-n}} = q(x)\, z^{\frac{n}{1-n}}$$

haline getirir. Daha sonra her taraf (sıfıra eşit olmayan) $z^{\frac{n}{1-n}}$ ile bölünerek

$$\frac{1}{1-n} z' + p(x)\, z = q(x)$$

şeklindeki lineer diferensiyel denklem elde edilir. Önce lineer diferensiyel denklem çözülür, sonra da $z = y^{1-n}$ yerine yazılarak Bernoulli diferensiyel denkleminin çözümü elde edilir. Ayrıca $n > 0$ ise $y = 0$ aykırı çözümü vardır.

Örnek 1. $3y^2 y' + y^3 = e^{-x}$ denkleminin tüm çözümlerini bulunuz.

Çözüm. Verilen denklemi (1) deki forma getirirsek

$$y' + \frac{1}{3} y = \frac{e^{-x}}{3} y^{-2}$$

yazılır. $n = -2$ olmak üzere $z = y^3$, $\frac{dz}{dx} = 3y^2 \frac{dy}{dx}$ alarak denklemde yerine yazılırsa

$$z' + z = e^{-x} \tag{2}$$

olur. Burada integral çarpanı $\lambda(x) = e^{\int dx} = e^x$ dir.

(2) denklemi $\lambda(x)$ ile çarpılırsa

$$e^x z' + e^x z = 1$$

$$\Rightarrow (e^x z)' = 1$$

$$\Rightarrow e^x z = x + c$$

$$\Rightarrow z = (x + c)\, e^{-x}$$

elde edilir. Böylece genel çözüm

$$y(x) = (c+x)^{1/3} e^{-x/3} \ , \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

dir.

Örnek 2.

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = xe^{-x^2} y^3$$

denklemini çözünüz.

Çözüm. Burada $n = 3$ olduğundan

$$z = y^{1-3} = y^{-2} \Rightarrow z' = -2y^{-3}y'$$

dir.

Şimdi denklemin her iki tarafı $-2y^{-3}$ ile çarpılarak

$$\begin{aligned} -2y^{-3}y' - 4xy^{-2} &= -2xe^{-x^2} \\ \Rightarrow z' - 4xz &= -2xe^{-x^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem lineerdir. İntegral çarpanı

$$e^{\int -4x dx} = e^{-2x^2}$$

olduğundan her iki taraf e^{-2x^2} ile çarpılarak

$$\begin{aligned} e^{-2x^2} z' - 4xe^{-2x^2} z &= -2xe^{-3x^2} \\ \left(e^{-2x^2} z\right)' &= -2xe^{-3x^2} \\ ze^{-2x^2} &= \int -2xe^{-3x^2 dx} = \frac{1}{3} \int -6xe^{-3x^2} dx = \frac{1}{3} e^{-3x^2} + c \\ z &= \frac{e^{-x^2}}{3} + ce^{2x^2} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece genel çözüm:

$$y = \left(\frac{e^{-x^2}}{3} + ce^{2x^2} \right)^{-1/2}$$

olur. Ayrıca $n = 3 > 0$ olduğundan $y = 0$ aykırı çözümü vardır.

Örnek 3. $y' - \dfrac{2y}{3x} = y^4 \ln x$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Örnek 4. $\dfrac{dy}{dx} + 3x^2y = y^2xe^{x^2}$, $y(1) = 0$ başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

Örnek 5. $x^2y' - (2\ln x)\,y = y^3e^{\frac{4\ln x}{x}}$ denkleminin çözümünü bulunuz.