

2. HAFTA

Çok Değişkenli Normallik Varsayımı Durumunda Temel Bileşenler

Çok değişkenli normallik varsayımı altında da temel bileşenler elde edilebilir. $\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$ olsun. Bu durumda $\underline{\mu}$ merkezli $(\underline{x} - \underline{\mu})' \Sigma^{-1} (\underline{x} - \underline{\mu}) = c^2$ sabit yoğunluk elipsleri eksenleri $\pm c\sqrt{\lambda_i} \underline{e}_i$ dir, burada $(\lambda_i, \underline{e}_i)$ ' ler Σ nın özdeğer ve birim özvektör çiftleridir. Elipsoidin i inci eksenini yer alan bir nokta, eksenleri x_1, x_2, \dots, x_p ve orjini $\underline{\mu}$ olan koordinat sisteminde $\underline{e}_i' = (e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{ip})$ ' ye orantılı koordinatlara sahip olacaktır. $\underline{\mu} = \underline{0}$ alınırsa,

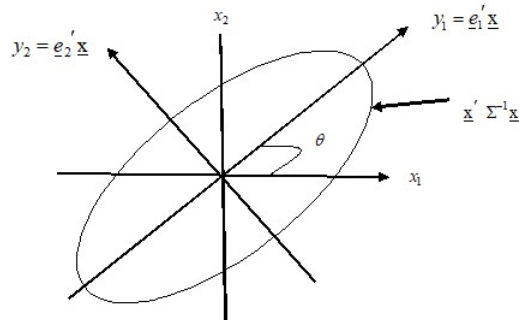
$$\begin{aligned} c^2 &= \underline{x}' \Sigma^{-1} \underline{x} \\ &= \frac{1}{\lambda_1} (\underline{e}_1' \underline{x})^2 + \frac{1}{\lambda_2} (\underline{e}_2' \underline{x})^2 + \dots + \frac{1}{\lambda_p} (\underline{e}_p' \underline{x})^2 \end{aligned}$$

biçiminde yazılır, burada $\underline{e}_1' \underline{x}$, $\underline{e}_2' \underline{x}$, ..., $\underline{e}_p' \underline{x}$ ' ler \underline{x} in temel bileşenleri gibi tanımlanabilir.

$y_1 = \underline{e}_1' \underline{x}$, $y_2 = \underline{e}_2' \underline{x}$, ..., $y_p = \underline{e}_p' \underline{x}$ alınırsa $c^2 = \frac{1}{\lambda_1} (y_1)^2 + \frac{1}{\lambda_2} (y_2)^2 + \dots + \frac{1}{\lambda_p} (y_p)^2$ olur ve bu

denklem $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_p$ ' nin yönleri boyunca y_1, y_2, \dots, y_p eksenli koordinat sisteminde bir elipsoiddir. Eğer λ_1 en büyük özdeğer ise büyük eksen \underline{e}_1 boyunca uzanır ve geriye kalan küçük eksenler $\underline{e}_2, \dots, \underline{e}_p$ ile tanımlanan yönler boyunca uzanırlar. $\underline{\mu} = \underline{0}$ ve $\rho_{x_1, x_2} = 0.75$ olan iki değişkenli normal rasgele vektör için sabit yoğunluk elipsi ve temel bileşenler aşağıdaki şekilde gösterilmiştir. Temel bileşenler sabit yoğunluk elipsinin eksenleri ile çakışana kadar orijinal koordinat eksenlerinin bir θ açısıyla döndürülmesiyle elde

edilir.



Standartlaştırılmış Değişkenlerden Temel Bileşenlerin Elde Edilmesi

$\underline{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_p)$ rasgele vektörünün bileşenlerinin ölçü birimleri farklı ise, temel bileşenlerin ölçü biriminden etkisini arındırmak için değişkenlerin standartlaştırılması gerekir.

$\underline{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_p)$ rasgele vektörünün bileşenlerinin standartlaştırılmış vektörü

$\underline{Z}' = (Z_1, Z_2, \dots, Z_p)$ dir. Burada $Z_i = \frac{(X_i - \mu_i)}{\sqrt{\sigma_{ii}}}$; $i = 1, \dots, p$ dir. Matris gösterimiyle

$\underline{Z} = (V^{1/2})^{-1}(\underline{X} - \underline{\mu})$ dir. Burada $V^{1/2}$ diagonal elemanları X_i rasgele değişkenlerinin standart sapmalarından oluşan $p \times p$ tipinde bir matristir. Ayrıca

$$E(\underline{Z}) = \underline{0}$$

ve

$$\begin{aligned} Cov(\underline{Z}) &= (V^{1/2})^{-1} \Sigma (V^{1/2})^{-1} \\ &= \mathbf{\rho} \\ &= Corr(\underline{X}) \end{aligned}$$

dir. Buradan \underline{X} rasgele vektörünün korelasyon matrisi, \underline{Z} rasgele vektörünün varyans-kovaryans matrisine eşit olduğundan, temel bileşenler korelasyon matrisi $\mathbf{\rho}$ dan elde edildiğinde, standartlaştırılmış değişkenlerden temel bileşenler elde edilmiş olur. Ancak Σ dan elde edilen $(\lambda_i, \underline{e}_i)$ özdeğer ve birim özvektör çiftleri, $\mathbf{\rho}$ dan elde edilenlerle aynı değildir.

Sonuç:

$Cov(\underline{Z}) = \mathbf{\rho}$ olan $\underline{Z}' = (Z_1, Z_2, \dots, Z_p)$ standartlaştırılmış rasgele değişkenler için i inci temel bileşen

$$\begin{aligned} Y_i &= \underline{e}_i' \underline{Z} \\ &= \underline{e}_i' (V^{1/2})^{-1} (\underline{X} - \underline{\mu}) ; \quad i = 1, 2, \dots, p \end{aligned}$$

dir. Bununla birlikte

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p Var(Y_i) &= \sum_{i=1}^p Var(Z_i) \\ &= p \end{aligned}$$

ve

$$\rho_{Y_i, Z_k} = e_{ki} \sqrt{\lambda_i} ; \quad i, k = 1, 2, \dots, p$$

dir. Bu durumda;

$(\lambda_1, \underline{e}_1), (\lambda_2, \underline{e}_2), \dots, (\lambda_p, \underline{e}_p)$ 'ler $\mathbf{\rho}$ nun özdeğer ve özvektör çiftleridir ve $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p \geq 0$

dir. Buradan k inci temel bileşenin varyansının toplam varyansa oranı

$$\frac{\lambda_k}{p}; \quad k = 1, 2, \dots, p$$

dir. Burada λ_k lar $\mathbf{\rho}$ özdeğerleridir.

Örnek 2: (Kovaryans ve Korelasyon matrislerinden elde edilen temel bileşenler) :

$\underline{X}' = (X_1, X_2)$ rasgele vektörüne ilişkin varyans-kovaryans ve korelasyon matrisleri

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 100 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \rho = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.4 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak verilsin. Her iki matris için temel bileşen ve temel bileşenlerin açıklama oranlarını elde ederek karşılaştırınız.

Çözüm 2:

- Σ matrisi için

$$\det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 4 \\ 4 & 100 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

eşitliğinden özdeğerler büyükten küçüğe sırasıyla $\lambda_1 = 100.16$ ve $\lambda_2 = 0.84$ bulunur. Bu özdeğerlere karşılık gelen birim özvektörler ise sırasıyla

$$\underline{e}'_1 = [0.040 \quad 0.999]$$

$$\underline{e}'_2 = [0.999 \quad -0.040]$$

elde edilir. Buradan temel bileşenler:

$$Y_1 = 0.040X_1 + 0.999X_2$$

$$Y_2 = 0.999X_1 - 0.040X_2$$

elde edilir.

$$Y_1 \text{ 'in toplam değişimi açıklama oranı : } \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{100.16}{100.16 + 0.84} = 0.9917$$

$$Y_2 \text{ 'in toplam değişimi açıklama oranı : } \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{0.84}{100.16 + 0.84} = 0.0013$$

- ρ matrisi için

-

$$\det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0.4 \\ 0.4 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

eşitliğinden özdeğerler büyükten küçüğe sırasıyla $\lambda_1^* = 1.4$ ve $\lambda_2^* = 0.6$ bulunur. Bu özdeğerlere karşılık gelen birim özvektörler ise sırasıyla

$$(\underline{e}_{-1}^*)' = [0.7071 \quad 0.7071]$$

$$(\underline{e}_{-2}^*)' = [0.7071 \quad -0.7071]$$

elde edilir. $Z_1 = \frac{X_1 - \mu_1}{\sqrt{1}}$ ve $Z_2 = \frac{X_2 - \mu_2}{\sqrt{100}}$ olmak üzere temel bileşenler:

$$Y_1^* = 0.7071 Z_1 + 0.7071 Z_2$$

$$Y_2^* = 0.7071 Z_1 - 0.7071 Z_2$$

elde edilir.

$$Y_1^* \text{ 'in toplam değişimi açıklama oranı : } \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{1.4}{1.4 + 0.6} = 0.70$$

$$Y_2^* \text{ 'in toplam değişimi açıklama oranı : } \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{0.6}{1.4 + 0.6} = 0.30$$

Sonuç 1 : Σ ve ρ matrislerinden elde edilen temel bileşenler farklıdır.

Sonuç 2 : Açıklama oranlarına bakılacak olursa Σ matrisinden elde edilen 1. Temel bileşenin açıklama oranı, ρ matrislerinden elde edilen 1. Temel bileşenin açıklama oranından yüksektir.

Standartlaştırma yapılmazsa X_2 değişkeni oldukça etkili olur :

$$Y_1 = \underline{e}_{-1}' \underline{X} = 0.040 X_1 + 0.999 X_2$$

Değişkenlerin ölçü birimleri birbirinden çok farklı olduğunda standartlaştırma yapılmalıdır.

Örnek 3 : $\underline{X}' = (X_1, X_2, X_3)$ rasgele vektörünün varyans- kovaryans matrisi aşağıda verilmiştir:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Temel bileşenleri elde ediniz.
- Temel bileşenlerin varyanslarını bulunuz.
- Temel bileşenler arasındaki kovaryansları bulunuz.
- Temel bileşenlerin toplam değişimi açıklama oranlarını hesaplayınız.
- Temel bileşenler ile rasgele değişkenler arasındaki korelasyon matrisini elde ediniz.

Çözüm 3 :

- Temel bileşenleri elde ediniz.

Temel bileşenlerin bulunabilmesi için öncelikle Σ varyans- kovaryans matrisinin özdeğer ve özvektörleri elde edilmelidir.

Özdeğerler için : $\det(\Sigma - \lambda I) = 0$ olacak şekildeki $\lambda \in \mathbb{R}$ değerlerini bulmalıyız.

$$\det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 4 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(4 - \lambda) \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(1 - (2 - \lambda)(1 - \lambda)) = 0$$

$\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2.6182$ ve $\lambda_3 = 0.382$ bulunur. (Özdeğerler büyükten küçüğe sıralanır :

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3)$$

Bu özdeğere karşılık gelen özvektörler : $\Sigma \underline{x} = \lambda \underline{x}$ eşitliğinden elde edilir.

Özdeğerler ve birim özvektörler aşağıdaki tabloda verilmiştir:

$$\lambda_1 = 4$$

$$\lambda_2 = 2.6182$$

$$\lambda_3 = 0.382$$

$$\underline{e}'_1 = [0 \ 1 \ 0]$$

$$\underline{e}'_2 = [-0.8507 \ 0 \ -0.5257]$$

$$\underline{e}'_3 = [0.5257 \ 0 \ -0.8507]$$

Buradan temel bileşenler:

$$Y_1 = \underline{e}'_1 \underline{X} = [0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = X_2$$

$$Y_2 = \underline{e}'_2 \underline{X} = [-0.8507 \ 0 \ -0.5257] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = -0.8507X_1 - 0.5257X_3$$

$$Y_3 = \underline{e}'_3 \underline{X} = [0.5257 \ 0 \ -0.8507] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = 0.5257X_1 - 0.8507X_3$$

elde edilir. Varyans-kovaryans matrisine bakıldığında, X_2 rasgele değişkeni diğer rasgele değişkenlerle ilişkisiz olduğundan, temel değişkenlerden birinin X_2 olacağı açıktır.

b) Temel bileşenlerin varyanslarını bulunuz.

$$Var(Y_1) = Var(X_2) = 4 = \lambda_1$$

$$Var(Y_2) = Var(\underline{e}'_2 \underline{X}) = \underline{e}'_2 \Sigma \underline{e}_2 = 2.6182 = \lambda_2$$

$$Var(Y_3) = Var(\underline{e}'_3 \underline{X}) = \underline{e}'_3 \Sigma \underline{e}_3 = 0.382 = \lambda_3$$

Ayrıca

$$\sum_{i=1}^3 Var(Y_i) = \sum_{i=1}^3 Var(X_i) = 7 \text{ 'dir.}$$

c) Temel bileşenler arasındaki kovaryansları bulunuz.

$$Cov(Y_i, Y_k) = Cov(\underline{e}'_i \underline{X}, \underline{e}'_k \underline{X}) = \underline{e}'_i \Sigma \underline{e}_k = 0, \quad i \neq k$$

$$Cov(Y_1, Y_2) = Cov(\underline{e}'_1 \underline{X}, \underline{e}'_2 \underline{X}) = \underline{e}'_1 \Sigma \underline{e}_2 = [0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.8507 \\ 0 \\ -0.5257 \end{bmatrix} = 0$$

$$Cov(Y_1, Y_3) = Cov(\underline{e}'_1 \underline{X}, \underline{e}'_3 \underline{X}) = \underline{e}'_1 \Sigma \underline{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5257 \\ 0 \\ -0.8507 \end{bmatrix} = 0$$

$$Cov(Y_2, Y_3) = Cov(\underline{e}'_2 \underline{X}, \underline{e}'_3 \underline{X}) = \underline{e}'_2 \Sigma \underline{e}_3 = \begin{bmatrix} -0.8507 & 0 & -0.5257 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5257 \\ 0 \\ -0.8507 \end{bmatrix} = 0$$

d) Temel bileşenlerin toplam değişimi açıklama oranlarını hesaplayınız.

- 1. Temel bileşenin toplam varyansa katkısı

$$\frac{Var(Y_1)}{\sum_{i=1}^3 Var(Y_i)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} = \frac{4}{7} = 0.5714$$

- 2. Temel bileşenin toplam varyansa katkısı

$$\frac{Var(Y_2)}{\sum_{i=1}^3 Var(Y_i)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} = \frac{2.6182}{7} = 0.3740$$

- 3. Temel bileşenin toplam varyansa katkısı

$$\frac{Var(Y_3)}{\sum_{i=1}^3 Var(Y_i)} = \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} = \frac{0.382}{7} = 0.0546$$

Burada ilk iki temel bileşenin toplam varyansa katkısı $0.5714 + 0.3740 = 0.9454$ (oldukça yüksek) olduğundan Y_1 ve Y_2 bileşenleri çok az bilgi kaybı ile değişkenlerin yani X_1, X_2, X_3 'ün yerini alır.

e) Temel bileşenler ile rasgele değişkenler arasındaki korelasyon matrisini elde ediniz.

$$\rho_{Y_i, X_k} = \frac{e_{ki} \sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\sigma_{kk}}}, \quad i, k = 1, 2, \dots, p$$

Örneğin : $e'_1 = [e_{11} \ e_{21} \ e_{31}] = [0 \ 1 \ 0]$ kullanılarak Y_1 temel bileşenin orjinal rasgele değişkenler ile arasındaki korelasyonlar :

$$\rho_{Y_1, X_1} = \frac{e_{11}\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\sigma_{11}}} = \frac{0\sqrt{4}}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\rho_{Y_1, X_2} = \frac{e_{21}\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\sigma_{22}}} = \frac{1\sqrt{4}}{\sqrt{4}} = 1$$

$$\rho_{Y_1, X_3} = \frac{e_{31}\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\sigma_{33}}} = \frac{0\sqrt{4}}{\sqrt{1}} = 0$$

$$\rho_{Y_2, X_1} = \frac{e_{12}\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\sigma_{11}}} = \frac{-0.8507\sqrt{2.6182}}{\sqrt{2}} = -0.97334$$

$$\rho_{Y_2, X_2} = \frac{e_{22}\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\sigma_{22}}} = \frac{0\sqrt{2.6182}}{\sqrt{4}} = 0$$

$$\rho_{Y_2, X_3} = \frac{e_{32}\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\sigma_{33}}} = \frac{-0.5257\sqrt{2.6182}}{\sqrt{1}} = -0.85063$$

$$\rho_{Y_3, X_1} = \frac{e_{13}\sqrt{\lambda_3}}{\sqrt{\sigma_{11}}} = \frac{0.5257\sqrt{0.382}}{\sqrt{2}} = 0.22975$$

$$\rho_{Y_3, X_2} = \frac{e_{23}\sqrt{\lambda_3}}{\sqrt{\sigma_{22}}} = \frac{0\sqrt{0.382}}{\sqrt{4}} = 0$$

$$\rho_{Y_3, X_3} = \frac{e_{33}\sqrt{\lambda_3}}{\sqrt{\sigma_{33}}} = \frac{-0.8507\sqrt{0.382}}{\sqrt{1}} = -0.52578$$

Tüm korelasyonlar hesaplanınca aşağıdaki tablo elde edilir:

ρ_{Y_i, X_k}	X_1	X_2	X_3
Y_1	0	1	0
Y_2	-0.97334	0	-0.85063
Y_3	0.22975	0	-0.52578