HAFTA 2

Teorem 1.1.3 I bir indis kümesi ve $\alpha \in I$ için $\mathcal{U}_\alpha$ lar aynı örnek uzay üzerinde tanımlı sigma cebirler olsun. Buna göre, $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{U}_\alpha$ da bir sigma cebirdir◊

Tanım 1.1.4 Ω kümesi üzerinde tanımlı iki sigma cebir $\mathcal{U}_1$ ve $\mathcal{U}_2$ olsun. $\mathcal{U}_1$ deki her olay aynı zamanda $\mathcal{U}_2$ de bir olay ise $\mathcal{U}_1$ *sigma cebiri* $\mathcal{U}_2$ *sigma cebirinden daha küçüktür* denir⊗

Teorem 1.1.4 Ω nın bazı alt kümelerinden oluşan bir sınıf $\mathcal{F}$ olsun (sigma cebir olmak zorunda değildir). Bu $\mathcal{F}$ sınıfını kapsayan en küçük bir sigma cebir vardır.

İspat: Önce, bu sınıfı kapsayan en az bir sigma cebir vardır. Kuvvet kümesi Ω nın bütün alt kümelerinden oluşan sigma cebir olduğundan bu sınıfı kapsar. Bu sınıfı kapsayan başka sigma cebirler de olabilir. Bunlara, I bir indis kümesi olmak üzere $\alpha \in I$ için $\mathcal{U}_\alpha$ diyelim. Bu sigma cebirlerin herbiri $\mathcal{F}$ sınıfını kapsadığından $\mathcal{U}_\alpha$ ların arakesiti de $\mathcal{F}$ sınıfını kapsar. Diğer taraftan, bu arakesit sigma cebiri $\mathcal{F}$ sınıfını kapsayan diğer $\mathcal{U}_\alpha$ sınıflarından küçüktür. O halde, $\mathcal{F}$ sınıfını kapsayan en küçük sigma cebir vardır◊

Herhangi bir $\mathcal{F}$ sınıfını kapsayan en küçük bir sigma cebir $\sigma(\mathcal{F})$ ile gösterilecektir. Bu $\mathcal{F}$ sınıfını kapsayan en küçük sigma cebire $\mathcal{F}$ nin *ürettiği sigma cebir* denir.

Örnek uzay reel sayılar kümesi ($\Omega = \mathbb{R}$) olsun. Reel sayılar doğrusu üzerindeki bir açık aralık, $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere, (a, b) şeklinde ifade edilir. Buna göre aşağıdaki sınıfları tanımlayalım:

$\mathcal{F}_1 = \{ (a,b) : a,b \in \mathbb{R} \text{ ve } a < b \}$, açık aralıkları sınıfı

$\mathcal{F}_2 = \{ [a,b] : a,b \in \mathbb{R} \text{ ve } a < b \}$, kapalı aralıklar sınıfı

$\mathcal{F}_3 = \{ (a,b] : a,b \in \mathbb{R} \text{ ve } a < b \}$, yarı açık aralıklar sınıfı.

Bu sınıfların hiçbiri sigma cebir değildir. $\Omega = \mathbb{R}$ olduğundan $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ olup ∞ bir reel sayı değildir. Dolayısı ile, $\Omega \notin \mathcal{F}_1$, $\Omega \notin \mathcal{F}_2$ ve $\Omega \notin \mathcal{F}_3$ dır. Bu sınıflar birer sigma cebir olmamasına rağmen, Teorem (1.1.4) gereğince, bu sınıfları kapsayan en az bir sigma cebir vardır.

Tanım 1.1.5 $\mathbb{R}$ deki açık aralıkların ürettiği sigma cebire *Borel cebiri* denir⊗

Borel cebiri $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ile gösterilecektir. Bu tanıma göre, $\mathbb{R}$ deki bütün açık aralıklar Borel cebirindedir. $\mathbb{R}$ deki diğer alt kümeler de Borel cebirindedir. Yani, $\{a\}$, $\{a,b,c\}$ türündeki tek nokta kümeleri, $[a,b]$ gibi kapalı aralıklar, $(a,b]$ gibi yarı-açık aralıklar ve $(-\infty, b]$ gibi aralıklar da Borel cebirindedir. Yani, Borel cebiri $\mathbb{R}$ deki açık aralıklar tarafından üretilen sigma cebiri olmasına rağmen, $\mathbb{R}$ deki diğer alt kümeleri de içerir. Şimdi bunu gösterelim. Önce $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $A_n = (a-(1/n)\ ,\ a+(1/n))$ açık aralıklar dizisini ele alalım. A_n ler açık aralıklar olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ dir. Ayrıca, Borel cebiri aynı zamanda bir sigma cebir olduğundan Teorem (1.1.1b) gereğince sayılabilir arakesitleri de Borel cebirindedir. Yani,

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

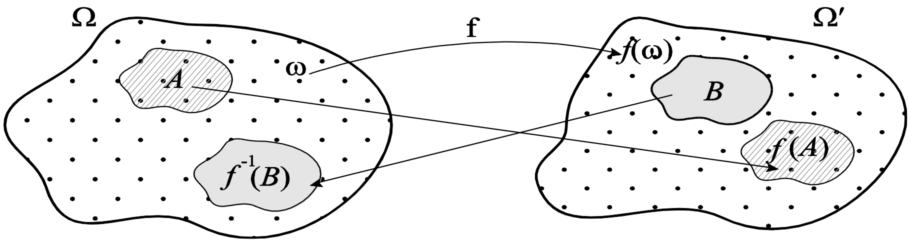
olup $\{a\}$ şeklindeki tek nokta kümeleri Borel cebirindedir. $A_n = \{n\}$ alınırsa, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ bir sigma cebir olduğundan $\mathbb{N}$ nin de (doğal sayılar kümesi) Borel cebirinde olduğu görülür. Benzer şekilde, rasyonel sayılar kümesi Q, sayılabilir bir küme olduğundan $Q \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ dir. İirrasyonel sayılar kümesi I , rasyonel sayılar kümesinin tümleyeni olduğundan $I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ dir.

Diğer taraftan, $a,b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere, $[a,b] = \{a\} \cup (a,b) \cup \{b\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ dir. Bununla birlikte, $A_n = [a-n\ ,\ a]$ olarak seçildiğinde,

$$(-\infty, a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

olur. Buradan, $\mathbb{R}$ deki bütün alt kümelerin Borel cebirinde olduğu izlenimi oluşmaktadır. Oysa, $\mathbb{R}$ de olup da Borel cebirinde olmayan alt kümeler olabilir.

Bir kümenin herhangi bir fonksiyona göre *görüntüsü* ile *ters görüntüsü* bir sonraki bölümde inceleyeceğimiz rasgele değişkenler açısından önemlidir. Burada, altkümelerin görüntüleri ile ters görüntülerini kısaca hatırlayalım. Ω ve Ω' boş olmayan iki küme ve $f : \Omega \to \Omega'$ olsun. Herhangi bir $A \subset \Omega$ için $f(A) = B \subset \Omega'$ dir. Ayrıca, $B \subset \Omega'$ için, B nin f fonksiyonuna göre ters görüntüsü $f^{-1}(B) = \{w \in \Omega : f(w) \in B\}$ dir. Burada, $f^{-1}(B) \subset \Omega$ olup, $f^{-1}(B)$ alt kümesi, görüntüleri B de olan Ω nın elemanlarının oluşturduğu altkümedir.



Şekil 1.1.3 Görüntü ve Ters Görüntü Kümeleri

Altkümelerin görüntüleri ile ters görüntülerine ilişkin özellikler aşağıdaki teoremde özetlenmiştir. Yukarıda da bahsedildiği gibi, herhangi iki küme birbirinin alt kümeleri ise, bu iki küme eşittir (yani, $A \subset B$ ve $B \subset A$ özellikleri sağlanıyorsa $A = B$ dir).

Teorem 1.1.5 Ω ve Ω' boş olmayan iki küme ve $f:\Omega\to\Omega'$ olsun. Her $i\in\mathbb{N}$ için ve $B_i\subset\Omega'$ olmak üzere,

a) $f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\right)=\bigcup_{i=1}^{\infty}f^{-1}(B_i)$

b) $f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i\right)=\bigcap_{i=1}^{\infty}f^{-1}(B_i)$

c) $f^{-1}(A\setminus B)=(f^{-1}(A))\setminus(f^{-1}(B))$, $A,B\subset\Omega'$

dir.

İspat: a) Her $x\in A$ için $x\in B$ ise $A\subset B$ ve her $x\in B$ için $x\in A$ ise $B\subset A$ dır. Bu iki altküme bağıntısı da geçerli ise $A=B$ dir. Buradan,

$$x\in f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\right)\Rightarrow f(x)\in\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\Rightarrow\exists n_0\ni f(x)\in B_{n_0}\Rightarrow x\in f^{-1}(B_{n_0})\Rightarrow x\in\bigcup_{i=1}^{\infty}f^{-1}(B_i)$$

olduğundan $f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\right)\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}f^{-1}(B_i)$ elde edilir. Benzer şekilde,

$$x\in\bigcup_{i=1}^{\infty}f^{-1}(B_i)\Rightarrow\exists n_0\ni x\in f^{-1}(B_{n_0})\Rightarrow f(x)\in B_{n_0}\Rightarrow f(x)\in\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\Rightarrow x\in f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\right)$$

olup $\bigcup_{i=1}^{\infty}f^{-1}(B_i)\subset f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\right)$ dir. Bu iki alt küme bağıntısından da,

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\right)=\bigcup_{i=1}^{\infty}f^{-1}(B_i)$$

eşitliği elde edilmiş olur. Bu da ispatın (a) kısmını tamamlar.

b) Benzer şekilde,

$$x\in f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i\right)\Rightarrow f(x)\in\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i\Rightarrow f(x)\in B_i,\forall i\Rightarrow x\in f^{-1}(B_i),\ \forall i\Rightarrow x\in\bigcap_{i=1}^{\infty}f^{-1}(B_i)$$

olduğundan $f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i\right)\subset\bigcap_{i=1}^{\infty}f^{-1}(B_i)$ alt küme bağıntısı elde edilir. Diğer taraftan,

$$x\in\bigcap_{i=1}^{\infty}f^{-1}(B_i)\Rightarrow x\in f^{-1}(B_i),\forall i\Rightarrow f(x)\in B_i,\forall i\Rightarrow f(x)\in\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i\Rightarrow x\in f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i\right)$$

eşitliğinden $\bigcap_{i=1}^{\infty}f^{-1}(B_i)\subset f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i\right)$ alt küme bağıntısı elde edilir. Bu iki alt küme bağıntısından $\bigcap_{i=1}^{\infty}f^{-1}(B_i)=f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i\right)$ eşitliği elde edilmiş olur.

c) Önce, $f^{-1}(B^c)=[f^{-1}(B)]^c$ olduğunu gösterelim. Bu eşitlik de,

$$x \in [f^{-1}(B)]^c \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \notin B \Leftrightarrow f(x) \in B^c \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B^c)$$

önermesinden açıktır. Buradan da,

$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A \cap B^c) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B^c) = f^{-1}(A) \cap [f^{-1}(B)]^c = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$$

bulunur ◊

Teorem 1.1.6 Ω ve Ω' boş olmayan iki küme ve $f : \Omega \to \Omega'$ olsun. Her $i \in \mathbb{N}$ için $A_i \subset \Omega$ olmak üzere,

a) $f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(A_i)$

b) $f\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} f(A_i)$, burada eşitlik yoktur

c) $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(\Omega),\ B \subset \Omega'$

dir.

İspat: Bu teoremin ispatı da bir önceki gibi iki kümenin birbirlerinin altkümeleri olduğu gösterilerek yapılabilir.

a) $y \in f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \Rightarrow y = f(x)$ olacak şekilde bir $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ vardır. Buradan,

$$x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \ni x \in A_{n_0} \Rightarrow f(x) \in f(A_{n_0}) \Rightarrow y = f(x) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} f(A_i)$$

$$\Rightarrow f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} f(A_i)$$

dir. Diğer taraftan,

$$y \in \bigcup_{i=1}^{\infty} f(A_i) \Rightarrow \exists n_0 \ni y \in f(A_{n_0}) \Rightarrow y = f(x) \text{ olacak şekilde } \exists x \in A_{n_0'} \Rightarrow x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

$$\Rightarrow f(x) \in f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} f(A_i) \subset f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

dir. Bu iki alt küme bağıntısından $f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(A_i)$ eşitliği elde edilir. Böylece, ispatın (a) kısmı tamamlanmıştır.

b) Kolayca görüleceği gibi

$$y\in f\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\right)\Rightarrow y=f(x) \text{ olacak şekilde bir } x\in\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i \text{ vardır}$$

$$\Rightarrow x\in A_i\,,\forall i\in\mathbb{N}\Rightarrow y=f(x)\in f(A_i),\forall i\in\mathbb{N}\Rightarrow f(x)\in\bigcap_{i=1}^{\infty}f(A_i)$$

$$\Rightarrow f\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\right)\subset\bigcap_{i=1}^{\infty}f(A_i)$$

dir.

Eşitliğin sağlanmadığını göstermek için tersine bir örnek vermek yeterlidir. Bunun için $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x)=x^2$ şeklinde verilmiş olsun. $A_1=\{-1,0\}$ ve $A_2=\{0,1\}$ diyelim. $A_1\cap A_2=\{0\}$ olup $f(A_1\cap A_2)=\{0\}$ dır. Oysa, $f(A_1)=\{0,1\}$ ve $f(A_2)=\{0,1\}$ dir. Yani, $f(A_1)\cap f(A_2)=\{0,1\}$ olup $f(A_1\cap A_2)\subset f(A_1)\cap f(A_2)$ dir. Bu sonuç da, eşitliğin sağlanmadığını göstermek için yeterlidir. Sonuç olarak $f(A_1\cap A_2)\neq f(A_1)\cap f(A_2)$ dir.

c) $B\subset\Omega'$ olsun. Bu durumda,

$$y\in f(f^{-1}(B))\Rightarrow y=f(x) \text{olacak şekilde bir } x\in f^{-1}(B), x\in\Omega \text{ vardır.}$$
$$\Rightarrow x\in\Omega \text{ ve } f(x)\in B\Rightarrow y=f(x)\in f(\Omega) \text{ ve } y=f(x)\in B \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow y\in B\cap f(\Omega)\Rightarrow f(f^{-1}(B))\subset B\cap f(\Omega)$$

dır. Diğer taraftan,

$$y\in B\cap f(\Omega)\Rightarrow y\in B \text{ ve } y\in f(\Omega)\Rightarrow\exists x\in\Omega\ni y=f(x) \text{ve} f(x)\in B,\ x\in f^{-1}(B)$$
$$\Rightarrow y=f(x)\in f(f^{-1}(B))\Rightarrow B\cap f(\Omega)\subset f(f^{-1}(B))$$

olup, bu iki altküme bağıntısından $f(f^{-1}(B))=B\cap f(\Omega)$ eşitliği elde edilir◊

1.2. Olasılık Ölçüsü ve Olasılık Uzayları

Bu kısımda, olasılık ölçüsü ve bazı temel özellikleri incelenecektir.

Tanım 1.2.1 Ω boş olmayan bir küme, $\mathcal{U}$ da Ω üzerinde bir sigma cebir olsun. $\mathcal{U}$ üzerinde tanımlı,

$$P:\mathcal{U}\to[0,1]$$
$$A\to P(A)$$

P küme fonksiyonu,

a) $\forall A\in\mathcal{U}$ için $P(A)\geq 0$
b) $P(\Omega)=1$
c) $A_n, n\in\mathbb{N}$ ler $\mathcal{U}$ daki ayrık ($A_k\cap A_j=\varnothing,\ k\neq j$) olayların bir dizisi olmak üzere,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

özelliklerini sağlıyorsa, P ye bir *olasılık ölçüsü,* $P(A)$ sayısına A *olayının olasılığı,* $(\Omega,\mathcal{U},P)$ üçlüsüne de bir *olasılık uzayı* denir $\otimes$

Aşağıda, olasılık ölçüsü ile ilgili özelliklerden bazıları bir teorem altında toplanmıştır. İspatlar, ifadelerden hemen sonra verilmiştir.

Teorem 1.2.1 $(\Omega,\mathcal{U},P)$ bir olasılık uzayı olsun.

a) $\forall A\in\mathcal{U}$ için, $P(A^c)=1-P(A)$ dır.

İspat: $A\cup A^c=\Omega$ ve A ile A^c ayrık olaylar ($A\cap A^c=\varnothing$) olduğundan,

$$P(A)+P(A^c)=P(A\cup A^c)=P(\Omega)=1$$

olup $P(A^c)=1-P(A)$ dir.

b) $P(\varnothing)=0$ dır.

İspat: $\Omega^c=\varnothing$ olup (a) daki sonuca göre $P(\varnothing)=P(\Omega^c)=1-P(\Omega)=0$ elde edilir.

c) $A_1,A_2\ldots,A_n$ ayrık olaylar ise,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

dir.

İspat: $k=1,2,3,...$ için $A_{n+k}=\varnothing$ alındığında sonuç olasılık ölçüsü tanımından açıktır. Buradan $A,B\in\mathcal{U}$, A ve B ayrık ise, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ dir.

d) $A,B\in\mathcal{U}$ ve $A\subset B$ ise $P(A)\le P(B)$ dir.

İspat: $B=A\cup(B\cap A^c)$ olup, A ile $B\cap A^c$ ayrık olaylar ve P bir olasılık ölçüsü olduğundan $P(A\cap B^c)\ge 0$ dır. Buradan aranan sonuç

$$P(B)=P(A\cup(B\cap A^c))=P(A)+P(B\cap A^c)\ge P(A)$$

şeklinde elde edilir. Buradan da, $A\subset B$ ise, $P(B\setminus A)=P(B)-P(A)$ elde edilir. Ayrıca, $A\in\mathcal{U}$ için $\varnothing\subset A\subset\Omega$ altküme bağıntısından, $P(\varnothing)\le P(A)\le P(\Omega)$ olup, $0\le P(A)\le 1$ dir.

e) $A,B\in\mathcal{U}$ ise, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ dir. Bu ifadenin daha genel hali, $A_n\in\mathcal{U}, n\in\mathbb{N}$ için,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n} P(A_i\cap A_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_i\cap A_j\cap A_k)$$
$$-\ldots+(-1)^{n-1}P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)$$
şeklindedir.

İspat: $n=2$ alalım (genel hali için matematiksel tümevarım kullanılır). $A\cup B$ kümesi $A\cup B=A\cup(B\setminus A)$ şeklinde yazılabilir. Buradan da, A ile $B\setminus A$ kümeleri ayrık olduğundan $P(A\cup B)=P(A)+P(B\setminus A)$ dir. Diğer taraftan, $A\cap B$ ile $B\setminus A$ ayrık olaylar olup B kümesi de $B=(A\cap B)\cup(B\setminus A)$ olarak yazıldığında B olayının olasılığı $P(B)=P(A\cap B)+P(B\setminus A)$ olarak yazılabilir. Buradan da $B\setminus A$ olayının olasılığı $P(B\setminus A)=P(B)-P(A\cap B)$ dir. $P(B\setminus A)$ nin değeri $P(A\cup B)$ eşitliğinde yerine yazıldığında aranan sonuç elde edilir. Yani,

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B\setminus A)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

dir.

f) $n\in\mathbb{N}$ için $A_n\in\mathcal{U}$ ise,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\le\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

dir.

İspat: $n\in\mathbb{N}$ için $A_n\in\mathcal{U}$ olaylarının dizisi ayrık değildir. A_n kümelerini kullanılarak

$$B_1=A_1 \quad \text{ve} \quad B_n=A_n\setminus\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)$$

ayrık olayların dizisini tanımlayalım. Önce, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ ve $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ alt küme bağıntılarının geçerli ise $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ dir. Şimdi, eşitliğin geçerli olduğunu gösterelim. Bunun için önce, her $n\in\mathbb{N}$ için $B_n\subset A_n$ olduğundan,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \qquad (*)$$

dir. Diğer taraftan, $\forall x\in\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ için, $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$ öyleki $x\in A_{n_0}$ dır. Bu n_0 doğal sayısı

$$x\notin A_1, x\notin A_2, \ldots, x\notin A_{n_0-1}, x\in A_{n_0}$$

olacak şekilde seçilebilir ($x\notin A_1$ ve $x\in A_2$ için $n_0=2$ olup, $x\in A_2\setminus A_1=B_2$ dir). Buradan,

$$x \notin A_1, x \notin A_2, ..., x \notin A_{n_0-1}, x \in A_{n_0} \Rightarrow x \in A_{n_0} \setminus \bigcup_{i=1}^{n_0-1} A_i = B_{n_0}$$
$$\Rightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \qquad (**)$$

olur. (*) ve (**) daki ifadeler birleştirildiğinde, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ eşitliği elde edilir. Şimdi bu sonucu kullanarak ispatı yapabiliriz. B_n ler ayrık ve $A \subset B$ ise $P(A) \le P(B)$, özellikleri kullanıldığında aranan sonuç,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

şeklinde elde edilir $\Diamond$

Şimdi, reel sayılardaki limit kavramını hatırlayalım ve sonra da küme dizilerinde limit tanımını yazalım. Elemanları reel sayılar olan bir dizi a_n olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ öyleki her $n > n_0$ için $|a_n - a| < \varepsilon$ oluyorsa, a_n dizisinin limiti vardır ve $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ dır.

Bir a_n dizisi için bir çok alt ve üst sınır yazılabilir. Bu alt sınırların en büyüğüne dizinin *limit infimumu* denir ve $\lim_{n\to\infty} \inf a_n$ veya $\underline{\lim}_{x\to\infty} a_n$ ile gösterilir. a_n dizisinin limit infumunu için,

$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left\{\inf_{k\ge n} a_k\right\} = \sup_{n\ge 0} \inf_{k\ge n} a_k = \sup\left\{\inf\left\{a_k : k \ge n\right\} : n \ge 0\right\}$$

şeklindeki gösterimlerden herhangi biri kullanılabilir. Benzer şekilde, üst sınırlarının en küçüğüne de dizinin *limit supremumu* denir ve $\lim_{n\to\infty} \sup a_n$ veya $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ ile gösterilir. a_n dizisinin supremumu için de

$$\lim_{n\to\infty} \sup a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left\{\sup_{k\ge n} a_k\right\} = \inf_{n\ge 0} \sup_{k\ge n} a_k = \inf\left\{\sup\left\{a_k : k \ge n\right\} : n \ge 0\right\}$$

gösterimlerinden biri kullanılabilir. Elemanları reel sayılar olan a_n dizisinin limit supremumu ve limit infimumu her zaman vardır. Eğer a_n dizisinin limiti varsa

$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n = \lim_{n\to\infty} \sup a_n$$

dir. Genel olarak, $\lim_{n\to\infty} \inf a_n \le \lim_{n\to\infty} \sup a_n$ dir.

Reel sayı dizilerindeki kavramlardan biraz farklı olarak küme dizilerinin limiti tanımlanır. Küme dizilerinde büyüklük ve küçüklük gibi kavramlar tanımlı olmadığı için alt küme kavramı kullanılır. A_n küme dizisini kapsayan bir çok alt küme bulunabilir. O zaman, A_n dizisini kapsayan alt kümelerden her biri A_n dizisi için bir üst sınır olarak alınabilir. Benzer şekilde A_n küme dizisi için alt sınırlar da yazılabilir.

Ω nın alt kümelerinden oluşan bir dizi A_n olsun. Açıkça görüleceği gibi bütün $n \in \mathbb{N}$ ler için $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \subset A_n$ dir. Buna göre $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ kümeleri her n için A_n dizisinin bir alt sınırı olarak alınabilir. Bu alt sınırların en büyüğü olarak bu kümelerin birleşimi alınabilir. Benzer şekilde, $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ olduğundan $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ kümeleri A_n dizisi için bir üst sınırdır. Bu üst sınırların en küçüğü de bu kümelerin arakesiti olur. Buradan, A_n küme dizisinin *limit infimumu ile limit supremumu,*

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \quad , \quad \limsup_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

olarak tanımlanır. Buradaki en büyük alt sınır ve en küçük üst sınır için,

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \left\{ w \in \Omega \ : \ \exists n_0 \ \text{ için } \ w \in A_{n_0}, \ n > n_0 \right\}$$

ve

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \left\{ w \in \Omega : \ \text{sonsuz çoklukta n için} \ \ w \in A_n \right\}$$

ifadeleri de kullanılabilir. $\limsup_{n\to\infty} A_n$ için bazen $\limsup_{n\to\infty} A_n = \{ w \in \Omega : \ w \in A_n \ , \ i.\,o\}$ ifadesi de kullanılır ("$i.o.$ infinitely often").

Tanım 1.2.2 Bir A_n küme dizisinin limit infimumu ile limit supremumu eşit ise, A_n *dizisinin limiti vardır* denir$\otimes$

Bu tanıma göre, $\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = A$ ise, $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ dır. Diğer taraftan,

$$w \in \lim_{n\to\infty} \inf A_n \Rightarrow w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \;\Rightarrow \exists n_0 \text{ için } \; w \in \bigcap_{k=n_0}^{\infty} A_k$$

$$\Rightarrow w \in A_k \;, \; k = n_0, n_0+1 \;, \; n_0+2, \ldots$$

$$\Rightarrow w \in \bigcup_{k=n_0}^{\infty} A_k \;, \text{ her } n_0 \;\Rightarrow w \in \bigcap_{n_0=1}^{\infty} \bigcup_{k=n_0}^{\infty} A_k = \lim_{n\to\infty} \sup A_n$$

olduğundan $\lim_{n\to\infty} \inf A_n \subset \lim_{n\to\infty} \sup A_n$ dir. Buradan, Teorem (1.2.1d) gereğince, $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ bir olasılık uzayı ve $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in \mathcal{U}$ olmak üzere,

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \inf A_n\right) \le P\left(\lim_{n\to\infty} \sup A_n\right)$$

dir. Ayrıca, ispatı bir çok olasılık kitabında bulunan ve *Fatou Lemması* olarak bilinen eşitsizlik,

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \inf A_n\right) \le \lim_{n\to\infty} \inf P\left(A_n\right) \le \lim_{n\to\infty} \sup P\left(A_n\right) \le P\left(\lim_{n\to\infty} \sup A_n\right)$$

şeklindedir (Feller, 1970, sayfa 110-111). Fatou lemmasının ispatı ileride Teorem (1.2.4) de verilmiştir.

Örnek 1.2.1 $A_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ olarak verilen A_n küme dizisinin limiti varsa bulalım. Bunun için dizinin limit infimumu ile limit supremumunun hesaplanması gerekir. Önce, A_n artan bir dizi ($\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n \subset A_{n+1}$) olduğundan $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$ dir. Buradan, dizinin limit infimumu

$$\lim_{n\to\infty} \inf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{N}$$

dir. Benzer şekilde A_n artan olduğundan, $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_n = \mathbb{N}$ olup dizinin limit supremumu da

$$\lim_{n\to\infty} \sup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \mathbb{N}$$

dir. $\lim_{n\to\infty} \inf A_n = \lim_{n\to\infty} \sup A_n = \mathbb{N}$ olup A_n dizisinin limiti vardır ve $\lim_{n\to\infty} A_n = \mathbb{N}$ dir $\oplus$

Küme dizilerinin limitinin bulunması bazen kolaydır. Aşağıdaki teorem artan ya da azalan küme dizisinin limitini bulmak için kullanılabilir.

Teorem 1.2.2 A_n artan ($\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n \subset A_{n+1}$) ya da azalan ($\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_{n+1} \subset A_n$) kümelerin bir dizisi ise limiti vardır ve

a) A_n artan ise $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

b) A_n azalan ise $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

dir.

İspat: a) Önce A_n artan ise $\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$ olup dizinin limiti infimumu,

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

dır. Şimdi, dizinin limit supremumunu bulalım. Bunun için A_n artan olduğunda,

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

olduğunu göstermek istiyoruz. Eğer

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{ve} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

her iki kapsama bağıntısıda gerçekleşirse, dizinin limit supremumu bulunmuş olur. Önce,

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \Rightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

olduğundan

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

elde edilir. Diğer taraftan, $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow x \in A_{n_0}$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı vardır. A_n dizisi artan ise bütün $k \in \mathbb{N}$ için $x \in A_{n_0+k}$ dir. Dolayısı ile, bütün $k \in \mathbb{N}$ için

$$x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n_0+k} \Rightarrow x \in \bigcap_{n_0=1}^{\infty} \bigcup_{k=n_0}^{\infty} A_k$$

dir. Buradan, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ bulunur. Bu iki sonuç birleştirildiğinde,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{ve} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

alt küme bağıntıları sağlanır. Dolayısı ile, artan A_n dizisi için $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ eşitliği elde edilir. Buna göre A_n dizisinin limit supremumu

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

dir. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} \sup A_n = \lim_{n\to\infty} \inf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

bulunur.

b) Şimdi A_n azalan (yani, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_{n+1} \subset A_n$) olsun. A_n azalan ise A_n^c dizisi artan olup limiti vardır. Buradan, (a) daki sonuç kullanıldığında, A_n^c artan küme dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \inf A_n^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c = \lim_{n\to\infty} \sup A_n^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$$

olup $\lim_{n\to\infty} A_n^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$ dir. Diğer taraftan,

$$\left(\lim_{n\to\infty} \inf A_n^c\right)^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \lim_{n\to\infty} \sup A_n$$

$$\left(\lim_{n\to\infty} \sup A_n^c\right)^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \lim_{n\to\infty} \inf A_n$$

eşitlikleri yazılır. Buradan da, A_n dizisinin limiti için alt ve üst limitler

$$\lim_{n\to\infty} \inf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k^c\right)^c = \left(\lim_{n\to\infty} \sup A_n^c\right)^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right)^c = \left(\lim_{n\to\infty} \inf A_n^c\right)^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

şeklinde hesaplanmıştır. Dolayısı ile

$$\lim_{n\to\infty} \inf A_n = \lim_{n\to\infty} \sup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

olduğundan dizinin limiti vardır ve

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

dir ◊