HAFTA 1

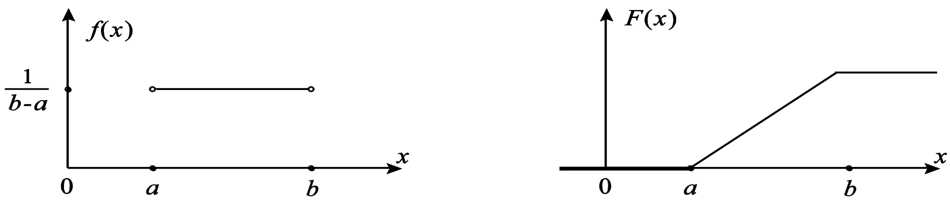
5.2. Tek Değişkenli Sürekli Dağılımlar

5.2.1. Sürekli Düzgün Dağılım

Olasılık yoğunluk fonksiyonu $a,b\in\mathbb{R}$ ve $a<b$ olmak üzere,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & , \quad a<x<b\\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

şeklinde olan bir X rasgele değişkenine $(a,\, b)$ aralığında *sürekli düzgün dağılıma sahiptir* denir ve $X\sim U(a,b)$ ile gösterilir. Sürekli düzgün dağılım yerine genellikle sadece düzgün dağılım ifadesi kullanılır.



Şekil 5.2.1 Düzgün dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu

Olasılık yoğunluk fonksiyonu ile dağılım fonksiyonunun grafikleri Şekil (5.2.1) de verildiği gibi olup dağılımın ilk iki momenti ile varyansı

$$E(X)=\int_a^b x\,f(x)\,dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b x\;dx=\frac{a+b}{2},\qquad E(X^2)=\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\;dx=\frac{a^2+b^2+ab}{3}$$

$$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

olup dağılımın moment çıkaran fonksiyonu ve karekteristik fonksiyonu

$$M_X(t)=\frac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t}\,,\ \phi_X(t)=\frac{e^{i\,bt}-e^{i\,at}}{(b-a)\,i\,t}$$

şeklinde hesaplanmıştır. Dikkat edilirse bu fonksiyonlar $t=0$ noktasında tanımlı değildir. Dağılımın $k.$ nci momenti ise

$$E(X^k)=\frac{1}{b-a}\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$$

olarak hesaplanmıştır.

Ayrıca, $a < c_1 < c_2 < b$ olmak üzere $P(c_1 < X < c_2)$ olasılığı,

$$P(c_1 < X < c_2) = \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx = \int_{c_1}^{c_2} \frac{1}{b-a} dx = \frac{c_2 - c_1}{b-a}$$

dır.

Eğer X rasgele değişkeninin dağılımı $X \sim U(0,\theta)$ ise dağılımın bütün momentleri ve varyansı

$$E(X^k) = \frac{\theta^k}{k+1} \text{ and } \mu = E(X) = \theta/2 \text{ and } Var(X) = \theta^2/12$$

olup merkezi momentler

$$E((X-\mu)^k) = \begin{cases} 0 & , \quad k \, tek \, tam \, sayı \\ \dfrac{\theta^k}{2^k(k+1)} & , \quad k \, çift \, tam \, sayı \end{cases}$$

veya

$$E((X-\mu)^k) = \begin{cases} 0 & , \quad k = 2j+1, \; j = 1,2,3,.... \\ \dfrac{\theta^k}{2^k(k+1)} & , \quad k = 2j, \; j = 1,2,3,... \end{cases}$$

şeklindedir. Gerçekten integralde $y = x - \theta/2$ denirse, $dy = dx$ olur ve sınırlar $x = 0$ için $y = -\theta/2$ ve $x = \theta$ için $y = \theta/2$ olur. Buradan,

$$E(X-\mu)^k = E(X-\theta/2)^k = \frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}(x-\theta/2)^k dx = \frac{1}{\theta}\int_{-\theta/2}^{\theta/2} y^k dy = \frac{1}{\theta}\left.\frac{y^{k+1}}{k+1}\right|_{y=-\theta/2}^{\theta/2}$$

$$= \frac{1}{\theta(k+1)} \left. y^{k+1} \right|_{y=-\theta/2}^{\theta/2} = \frac{1}{\theta(k+1)}\left[\left(\frac{\theta}{2}\right)^{k+1} - \left(-\frac{\theta}{2}\right)^{k+1}\right] = \frac{1}{\theta(k+1)}\frac{1}{2^{k+1}}\left[\theta^{k+1} - (-\theta)^{k+1}\right]$$

elde edilir. Eğer k tek tamsayı ise $k+1$ çift olacağından $(-\theta)^{k+1} = \theta^{k+1}$ olur ve buradan

$$E(X-\mu)^k = \frac{1}{\theta(k+1)}\frac{1}{2^{k+1}}\left[\theta^{k+1} - (-\theta)^{k+1}\right] = \frac{1}{\theta(k+1)}\frac{1}{2^{k+1}}\left[\theta^{k+1} - \theta^{k+1}\right] = 0$$

elde edilir. Bununla birlikte, k çift bir tamsayı ise $k+1$ tek olup $(-\theta)^{k+1} = -\theta^{k+1}$ dir. Dolayısı ile,

$$E(X-\mu)^k=\frac{1}{\theta(k+1)}\frac{1}{2^{k+1}}\left[\theta^{k+1}-(-\theta)^{k+1}\right]=\frac{1}{\theta(k+1)}\frac{1}{2^{k+1}}\left[\theta^{k+1}+\theta^{k+1}\right]=\frac{\theta^k}{2^k(k+1)}$$

bulunur.

5.2.2. Gamma Dağılımı

Bu dağılımın özelliklerine geçmeden Gamma dağılımı ile ilgili,

$$\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}=\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}d\,x\,,\quad \Gamma(n+1)=n!,\quad \Gamma(\alpha+1)=\alpha\,\Gamma(\alpha)\,,\quad 0!=1$$

eşitliklerini hatırlayalım. Buradan,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}} & , \quad x>0\\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun tanım kümesi üzerinden integrali

$$\int_0^{\infty}f(x)dx=1$$

olduğundan $f(x)$ fonksiyonu bir olasılık yoğunluk fonksiyonudur. X rasgele değişkeni böyle bir olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip ise X Gamma dağılımına sahiptir denir ve $X\sim Gamma(\alpha,\beta)$ ile gösterilir. $X\sim Gamma(\alpha,\beta)$ ise $n\in\mathbb{N}$ için

$$E(X^n)=\int_{x\in D_X}x^n f(x)\,dx=\int_0^{\infty}\frac{x^n x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}}dx=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}}\int_0^{\infty}\frac{x^{n+\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}}dx=\frac{\Gamma(\alpha+n)\,\beta^n}{\Gamma(\alpha)}$$

olup dağılımın bütün momentleri $E(X^n)=\Gamma(\alpha+n)\,\beta^n/\Gamma(\alpha)$ eşitliğinden elde edilir. Buradan dağılımın ilk iki momenti ve varyansı,

$$E(X)=\frac{\Gamma(\alpha+1)\,\beta}{\Gamma(\alpha)}=\frac{\alpha\,\Gamma(\alpha)\,\beta}{\Gamma(\alpha)}=\alpha\,\beta$$

$$E(X^2)=\frac{\Gamma(\alpha+2)\,\beta^2}{\Gamma(\alpha)}=\frac{(\alpha+1)\Gamma(\alpha)\beta^2}{\Gamma(\alpha)}=\frac{\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)\,\beta^2}{\Gamma(\alpha)}=\alpha(\alpha+1)\,\beta^2$$

$$Var(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2=\alpha(\alpha+1)\beta^2-\left(\alpha\,\beta\right)^2=\alpha\,\beta^2$$

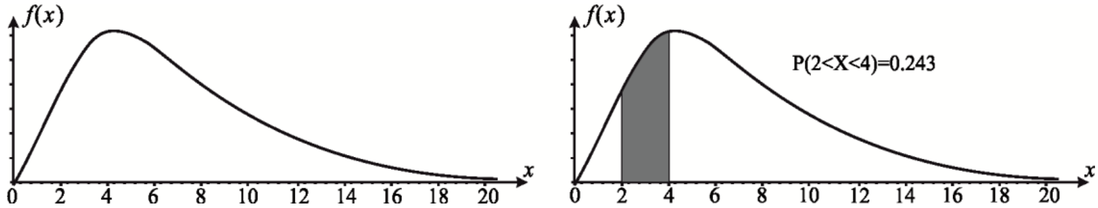
dir. $X\sim Gamma(\alpha,\beta)$ ise dağlımın moment çıkaran fonksiyonu da Gamma fonksiyonunun özelliklerinden $t<1/\beta$ için

$$M_X(t)=E(e^{tX})=\int_{x\in D_X} e^{tx} f(x)\,dx=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}}\int_0^{\infty} e^{tx}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}dx$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}}\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x(1-t\beta)/\beta}dx=\frac{\Gamma(\alpha)\left(\beta/(1-t\beta)\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}=\left(\frac{1}{1-t\beta}\right)^{\alpha}$$

şeklinde bulunmuştur. $a,b\in\mathbb{R}$ ve $a<b$ olmak üzere $P(\{w: a<X(w)<b\})$ veya kısaca $P(a<X<b)$ olasılığı $\int_a^b f(x)\,dx$ integrali ile hesaplanır. Örneğin, $X\sim Gamma(3,2)$ için $P(2<X<4)=0.243$ olarak hesaplanmıştır. Bu olasılık aşağıda (Şekil (5.2.2)) gösterilen taralı alandır.

Olasılık ve istatistikte çok karşılaşılan dağılımların bazıları (Üstel ve Ki-kare gibi) Gamma dağılımının özel halidir. Şimdi, bu özel durumları inceleyelim.



Şekil 5.2.2 $\alpha=3$, $\beta=2$ *için Gamma dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu*

2a Üstel Dağılım

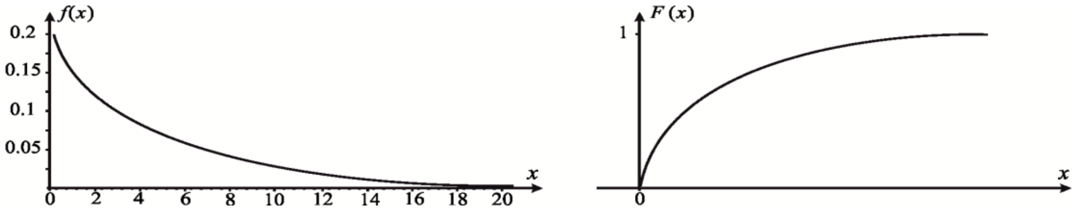
$X\sim Gamma(\alpha,\beta)$ olsun. $\alpha=1$ için X in olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x)=\begin{cases}(1/\beta)\,e^{-x/\beta} & , \quad x>0\\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

şeklinde olup X rasgele değişkeni üstel dağılıma sahiptir ve $X\sim Üstel(\beta)$ ile gösterilir. Dağılımın momentleri ve varyansı Gamma dağılımının momentlerinde $\alpha=1$ yazılarak bulunur. Yani,

$$E(X)=\beta,\quad E(X^2)=2\beta^2 \quad \text{ve} \quad Var(X)=\alpha\beta^2$$

dir. $X\sim Gamma(\alpha,\beta)$ dağılımının bütün momentlerinin $E(X^k)=\beta^k\Gamma(\alpha+k)/\Gamma(\alpha)$ şeklinde olduğundan $\alpha=1$ için $\Gamma(k+1)=k!$ olup üstel dağılımın bütün momentleri $E(X^k)=k!\beta^k$ şeklindedir. Dağılımın moment çıkaran fonksiyonu da Gamma dağılımının moment çıkaran fonksiyonunda $\alpha=1$ yazılarak bulunur. Yani, $X\sim Üstel(\beta)$ dağılımının moment çıkaran fonksiyonu $t<1/\beta$ için $M_X(t)=1/(1-t\beta)$ dir. Üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu ile dağılım fonksiyonunun grafikleri $\beta=5$ için Şekil (5.2.3) de verildiği gibidir.



Şekil 5.2.3 $\beta = 5$ *için üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu*

Bir X rasgele değişkeninin ortancası (medyanı) $P(X \geq m) \geq 1/2$ ve $P(X \leq m) \geq 1/2$ koşullarını sağlayan bir m sayısıdır. Bu olasılıklar

$$P(X \geq m) = e^{-m/\beta} \text{ ve } P(X \leq m) = 1 - e^{-m/\beta}$$

olup dağılımın medyanı $e^{-m/\beta} = 1 - e^{-m/\beta}$ eşitliğinden $m = -\beta \ln(1/2) = \beta \ln(2)$ olarak elde edilir. Yani, Üstel dağılımın medyanı $m = \beta \ln(2)$ dir.

2b Ki-Kare Dağılımı

$X \sim Gamma(\alpha, \beta)$ olsun. $\alpha = p/2$ ve $\beta = 2$ için olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{(p/2)-1} e^{-x/2}}{\Gamma(p/2) 2^{p/2}} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

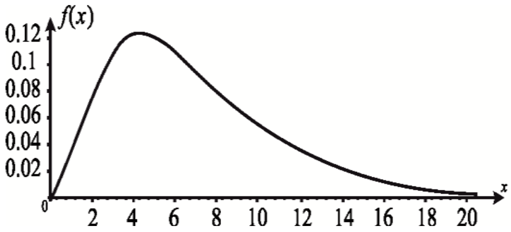
olur. Olasılık yoğunluk fonksiyonu bu şekilde olan X rasgele değişkenine *serbestlik derecesi* p *olan ki-kare dağılımına sahiptir* denir ve $X \sim \chi_p^2$ ile gösterilir. Dağılımın momentleri Gamma dağılımının momentlerinde $\alpha = p/2$ ve $\beta = 2$ yazılarak bulunur. Yani,

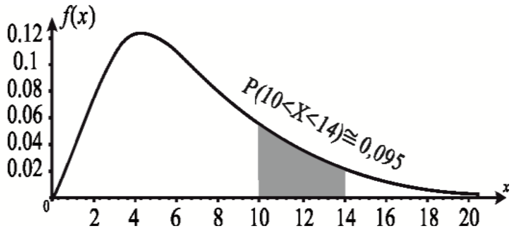
$$E(X) = \alpha \beta = (p/2)2 = p \text{ ve } Var(X) = \alpha \beta^2 = (p/2)\, 2^2 = 2p$$

dir. Ki-kare dağılımının beklenen değeri serbestlik derecesine, varyansı da serbestlik derecesinin iki katına eşittir. Bu dağılım, ileride göreceğimiz normal dağılan bir rasgele değişkenin fonksiyonu (karesi) olarak da karşımıza çıkmaktadır ve istatistikte çok kullanılan dağılımlardan biridir.Dağılımın bütün momentleri Gamma dağılımının özelliklerinden elde edilir. Kısaca X rasgele değişkeni $X \sim \chi_p^2$ dağılımlı bir rasgele değişken ise, X in bütün momentleri

$$E(X^k) = \left[\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\right]^{-1} \left[\Gamma\left(\frac{p}{2} + k\right)\right] 2^k$$

şeklinde hesaplanır. Dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği $p = 6$ için aşağıdadır. Ayrıca, $X \sim \chi_6^2$ olmak üzere $P(10 < X < 14)$ olasılığı Şekil (5.2.4) de belirtilen taralı alandır.





Şekil 5.2.4 $p=6$ *için ki-kare dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu*

$X \sim \chi_6^2$ olmak üzere $P(10<X<14)$ olasılığı, $\Gamma(6/2)\,2^{6/2}=16$ olup

$$P(10<X<14)=\int_{10}^{14} f(x)dx=\int_{10}^{14}\frac{1}{16}x^2e^{-x/2}dx=0.0950158556\cong 0.095$$

olarak hesaplanmıştır. Bu dağılım istatistikte çok kullanılan dağılımlardan biri olduğu için değişik serbestlik dereceleri için olasılıklar hesaplanmış ve tablolaştırılmıştır. Bu tablolar hemen hemen birçok istatistik kitabında bulunmaktadır. Örneğin, $X \sim \chi_6^2$ dağılımı için $P(10.64<X<14.45)$ olasılığı (Maple VIII)

$$P(10.64<X<14.45)=\int_{10.64}^{14.45} f(x)dx=\int_{10.64}^{14.45}\frac{1}{16}x^2e^{-x/2}dx=0.07516647661\cong 0.075$$

olarak hesaplanmıştır. Tablo değerleri (ki-kare dağılım tabloları) kullanılarak aynı olasılık,

$$P(10.64<X<14.45)=F_X(14.45)-F_X(10.64)=0.975-0.900=0.075$$

olarak bulunmuştur.

2c Weibull Dağılımı

$X \sim \ddot{U}stel(\beta)$ olsun. $\gamma>0$ için $Y=X^{\gamma}$ dönüşümünün olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(y)=\begin{cases}(\gamma/\beta)\,y^{\gamma-1}e^{-y^{\gamma}/\beta} & ,\quad y>0\ ,\ \beta>0,\ \gamma>0\\ 0 & ,\quad d.y.\end{cases}$$

dir. Olasılık yoğunluk fonksiyonu bu şekilde olan Y rasgele değişkenine *Weibull dağılımına sahiptir* denir. Dağılımın bütün momentleri $x=y^{\gamma}$ dönüşümü ile kolayca elde edilir. Gerçekten, $x=y^{\gamma}$ ise $dx=\gamma y^{\gamma-1}dy$ olup $y=x^{1/\gamma}$ dır. Buradan da,

$$E(Y^k)=\int_{y=0}^{\infty} y^k f_Y(y)dy=\frac{1}{\beta}\int_{y=0}^{\infty} y^k\gamma y^{\gamma-1}e^{-y^{\gamma}/\beta}dy=\frac{1}{\beta}\int_{y=0}^{\infty} y^k e^{-y^{\gamma}/\beta}\gamma y^{\gamma-1}dy$$

$$=\frac{1}{\beta}\int_{y=0}^{\infty} x^{k/\gamma}e^{-x/\beta}dx=\frac{1}{\beta}\beta^{(k/\gamma)+1}\Gamma\left(\frac{k}{\gamma}+1\right)=\beta^{(k/\gamma)}\Gamma\left(\frac{k}{\gamma}+1\right)$$

dir. Burada $\delta = 1/\gamma$ denirse dağılımın bütün momentleri

$$E(Y^k) = \beta^{k\delta}\Gamma(k\delta + 1)$$

şeklinde hesaplanmış olur. Buradan, dağılımın ilk iki momenti

$$E_\delta(Y) = \beta^\delta \Gamma(\delta + 1) \text{ ve } E_\delta(Y^2) = \beta^{2\delta}\Gamma(2\delta + 1)$$

şeklinde yazılır. Buradan, da dağılımın varyansı $Var_\delta(Y) = \beta^{2\delta}[\Gamma(2\delta + 1) - (\Gamma(\delta + 1))^2]$ olur. δ nın bazı değerleri için dağılımın ilk dört momeni ile varyansı hesaplanarak aşağıda tablo halinde verilmiştir.

	$\delta = 1/2$	$\delta = 1$	$\delta = 3/2$	$\delta = 2$
$E(Y)$	$(\sqrt{\beta\pi})/2$	β	$(3/4)\sqrt{\pi}\,\beta^{3/2}$	$2\beta^2$
$E(Y^2)$	β	$2\beta^2$	$6\beta^3$	$24\beta^4$
$E(Y^3)$	$(3/4)\sqrt{\pi}\,\beta^{3/2}$	$6\beta^3$	$(945/32)\sqrt{\pi}\,\beta^{9/2}$	$720\beta^6$
$E(Y^4)$	$2\beta^2$	$24\beta^4$	$720\beta^6$	$40320\,\beta^8$
$Var(Y)$	$\beta(1-\pi/4)$	β^2	$(6-9\pi/16)\,\beta^3$	$20\,\beta^4$

Weibull dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği de $\gamma = 2$ ve $\beta = 4$ için Şekil (5.2.5) de verilmiştir.

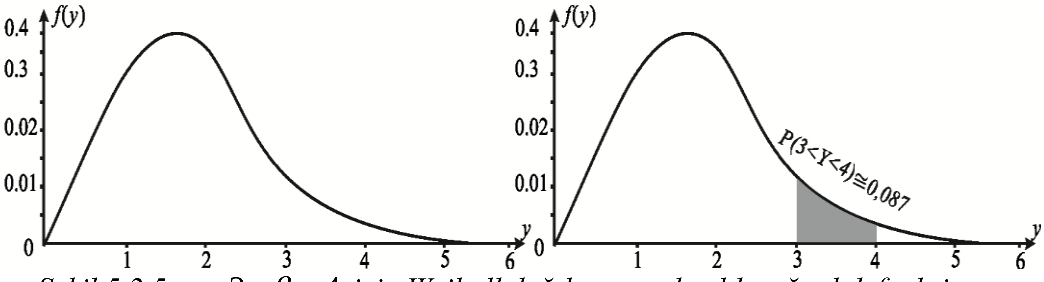
$\gamma = 2,\ \beta = 4$ için dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(y) = \begin{cases} 0.5\,y\,e^{-y^2/4} & , \quad y > 0 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

şeklinde olup $P(3 < Y < 4)$ olasılığı,

$$P(3 < Y < 4) = \int_3^4 f(x)dx = \int_3^4 0.5\,y\,e^{-y^2/4}dy = 0.08708358567 \cong 0.087$$

olarak hesaplanmıştır. Bu olasılık da, Şekil (5.2.5) de gösterilen taralı alandır.



Şekil 5.2.5 $\gamma = 2,\ \beta = 4$ için Weibull dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu

5.2.3. Beta Dağılımı

Matematikte Beta fonksiyonu,

$$Beta(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

olarak tanımlanır ve Beta ve Gamma fonksiyonları arasında

$$Beta(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

şeklinde bir ilişki vardır. Buradan,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & , \quad 0<x<1\\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonun tanım bölgesi üzerinden integrali 1 dir. Yani, bu fonksiyon bir olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Böyle bir olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip X rasgele değişkenine *Beta dağılımına sahiptir* denir ve $X \sim Beta(\alpha,\beta)$ ile gösterilir. Bütün $n\in\mathbb{N}$ için

$$E(X^n)=\int_0^1 x^n f(x)dx=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 x^{n+\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$
$$=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+n+\beta)}=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha+n+\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)}$$

olduğundan dağılımın momentleri

$$E(X^n)=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha+n+\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)}$$

formülü ile hesaplanır. Bu formülden dağılımın ilk iki momenti,

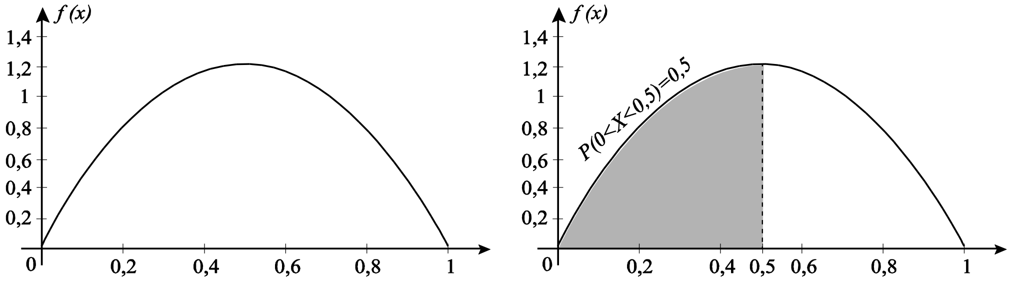
$$E(X)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1+\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)}=\frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)}=\frac{\alpha}{(\alpha+\beta)}$$

$$E(X^2)=\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+2+\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)}=\frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}$$

olup dağılımın varyansı da,

$$Var(X)=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

dir. $X \sim Beta(\alpha,\beta)$ dağılımı $\alpha=\beta=1$ için $X \sim U(0,1)$ dir. Yani düzgün dağılım, Beta dağılımının özel halidir. $X \sim Beta(2,2)$ dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği aşağıda Şekil (5.2.6) da vwerilmiştir.



Şekil 5.2.6 $Beta(2,2)$ *dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu*

$X \sim Beta(2,2)$ ise olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

şeklinde olup $P(0 < X < 0.5)$ olasılığı

$$P(0 < X < 0.5) = \int_0^{0.5} 6x(1-x)\,dx = (2x^3 - 3x^2)\Big|_{x=0}^{0.5} = 0.5$$

olarak hesaplanmıştır.

Örnek 5.2.1 Yukarıda, $Beta(\alpha,\beta)$ fonksiyonu ile $Gamma(\alpha,\beta)$ fonksiyonu arasındaki ilişki verildi. Beta ve Gamma dağılımları arasında da benzer bir ilişki beklenebilir. X ve Y bağımsız $X \sim Gamma(n,\theta)$, $Y \sim Gamma(m,\theta)$ olsun. $U = X/(X+Y)$ dönüşümünün dağılımı $U \sim Beta(n,m)$ dir. Şimdi bunu gösterelim.

X ve Y bağımsız olduğundan ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x,y) = \frac{1}{\Gamma(n)\Gamma(m)\theta^{n+n}} x^{n-1} y^{m-1} e^{-(x+y)/\theta} \quad , \; x > 0, y > 0$$

şeklinde yazılır. $V = X + Y$ yardımcı dönüşümü ile ters dönüşümler $X = UV$ ve $Y = V(1-U)$ olur. Ayrıca, $D_U = (0,1)$ ve $D_V = \mathbb{R}^+$ olduğu açıktır. Jacobien matrisi ve determinantı,

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v & u \\ -v & 1-u \end{bmatrix} \Rightarrow \det\left(J\right) = v$$

olup U ile V nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu, $,v > 0$, $0 < u < 1$ için

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{v\,(uv)^{n-1} v^{m-1} (1-u)^{m-1} e^{-v/\theta}}{\Gamma(n)\Gamma(m)\theta^{n+m}} = \frac{u^{n-1}(1-u)^{m-1} v^{n+m-1} e^{-v/\theta}}{\Gamma(n)\Gamma(m)\theta^{n+m}}$$

olarak elde edilir. Buradan U nun marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu, ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun D_V üzerinden integrali ile bulunur. Gamma fonksiyonunun özelliğinden faydalanılarak U nun olasılık yoğunluk fonksiyonu $0 < u < 1$ için,

$$f_U(u) = \int_{v=0}^{\infty} f_{U,V}(u,v)\,dv = \frac{u^{n-1}(1-u)^{m-1}}{\Gamma(n)\Gamma(m)\theta^{n+m}} \int_{v=0}^{\infty} v^{n+m-1} e^{-v/\theta} dv$$
$$= \frac{u^{n-1}(1-u)^{m-1}\theta^{n+m}\Gamma(n+m)}{\Gamma(n)\Gamma(m)\theta^{n+m}} = \frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(n)\Gamma(m)} u^{n-1}(1-u)^{m-1}$$

olarak bulunmuştur. Bu fonksiyon da $U \sim Beta(n,m)$ dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonudur $\oplus$

5.2.4. Cauchy Dağılımı

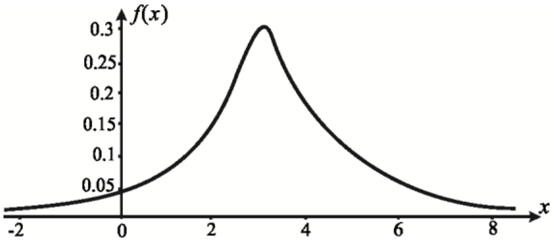
X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

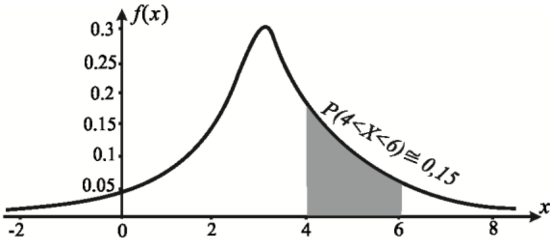
$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+(x-\theta)^2} \ , \ x \in \mathbb{R}$$

şeklinde ise, X Cauchy dağılımına sahiptir denir ve $X \sim Cauchy(\theta)$ ile gösterilir. Bu fonksiyon,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+(x-\theta)^2} dx = \frac{1}{\pi}\left(\arctan(\infty) - \arctan(-\infty)\right) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 1$$

olduğundan bir olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Cauchy dağılımının en belirgin özelliği hiçbir momentinin olmamasıdır. Dağılım θ ya göre simetrik olup $\theta = 3$ için olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği aşağıda Şekil (5.2.7) de verilmiştir.





Şekil 5.2.7 $\theta = 3$ için Cauchy dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu

X rasgele değişkeni Cauchy dağılımına sahip olsun. $P(4 < X < 6)$ olasılığı,

$$P(4 < X < 6) = \int_4^6 f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_4^6 \frac{1}{1+(x-3)^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\arctan(x-3)\Big|_{x=4}^{6}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\arctan(3) - \arctan(1)\right) \cong \frac{1}{\pi}\left(\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{20} = 0.15$$

olarak hesaplanmıştır. Bu olasılık Şekil (5.2.7) de belirtilen taralı bölgenin alanıdır. Benzer şekilde,

$$P(3 < X < 4) = \frac{1}{\pi}\int_4^6 \frac{1}{1+(x-3)^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\arctan(x-3)\Big|_{x=3}^{4}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\arctan(1) - \arctan(0)\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{1}{4} = 0.25$$

dir.