HAFTA 10

9.3. Hata Olasılıkları ve Güç Fonksiyonu

Bir hipotez (ya da iddia) ya doğrudur ya da değildir. Bir deneyin sonuçlarından elde edilen gözlem değerlerine göre H_0 yokluk hipotezi red edilir ya da red edilemez. Ayrıca, gerçekte H_0 doğru olmasına rağmen, gözlem değerlerine göre H_0 red edilebilir. Bu durumda bir hata yapılmış olur. Bu hataya *birinci tür hata* denir. Tersine, gerçekte H_0 doğru olmamasına rağmen, verilere göre H_0 yokluk hipotezi red edilemez. Burada da bir hata yapılmış olur. Bu hataya da *ikinci tür hata* denir. Örneğin, bir paranın düzgün (hilesiz) olup olmadığını araştırmak için para 100 defa atılsın. Gelen turaların (veya yazıların) sayısı gözlenerek paranın düzgün (hilesiz) olup olmadığı araştırılmak istendiğinde, eğer gelen turaların oranı $1/2$ ye yakın ise paranın düzgün olduğu söylenebilir. Gelen turaların sayısı 40 dan az ve 60 dan fazla ise paranın düzgün olduğu yokluk hipotezi red edilir şeklinde bir kural da oluşturulabilir. O zaman, örneğin 60 dan fazla tura gözlendiğinde paranın düzgün olmadığı sonucuna varılır. Oysa, para düzgün olmasına rağmen, 100 defa tura gözlenmesi olasıdır. Dolayısı ile, burada da kontrol edilemeyen bir hata yapılmıştır. Bu hata birinci tür hatadır. Yani, gerçekte, H_0 doğru olmasına rağmen gözlem değerlerine göre H_0 yokluk hipotezi red edilmiştir.

Bir sınıftaki istatistik dersinin başarısı ile ilgilendiğimizi düşünelim. Bir grup öğrenci dersi veren öğretim üyesinden şikayetçi olmak amacı ile sınıf ortalamasının oldukça düşük olduğunu iddia ediyor olsun. Gerçekte sınıf ortalaması yüksek olabilir. Oysa şikayete gelen öğrenciler düşük not alan öğrenciler olacağından, bu öğrencilerin notları dikkate alındığında öğrencilerin iddiası red edilemez. Dolayısı ile, gerçekte sınıf ortalaması yüksek olmasına rağmen, şikayete gelen öğrencilerin notları dikkate alındığında öğrencilerin iddiası red edilemez. O halde, bir hata yapılmıştır. Ancak, burada örnek değerler olarak şikayete gelen öğrencilerin notları dikkate almak istatistiki olarak anlamlı değildir. Bu durumda yapılan hata değil, yanlıştır. Oysa, rasgele bir örnekleme yapıldığında, örnekleme bu öğrenciler de çıkabilir. Bu hatalar aşağıda tablo halinde verilmiştir.

		Karar	
Doğru Hipotez		H_0 red edilemez	H_0 red edilir
	H_0 doğrudur	Doğru Karar	*Birinci Tür Hata*
	H_a doğrudur	*İkinci Tür Hata*	Doğru Karar

Hipotez testlerinde amaçlarından biri, bu hatalar minimum olacak şekilde yöntemlerin ya da test kurallarının geliştirilmesidir. Hataları minimum yapmak yerine hata olasılıkları minimum olacak yöntemlerin geliştirilmesi üzerinde durulur. Genel olarak birinci tür hata olasılığı sabit tutularak ikinci tür hata olasılığı en küçük (minimum, yani gücü en fazla) olacak şekilde yöntemler geliştirilmeye çalışılır.

Tanım 9.3.1 Birinci tür hata olasılığına *testin anlam düzeyi* denir ve α ile gösterilir $\otimes$

Tanım 9.3.2 H_0 yokluk hipotezinin red edilmesi olasılığına *testin gücü* denir $\otimes$

Bir testin gücü parametrenin fonksiyonu olup, genelklikle $\beta(\theta)$ ile gösterilir. Yani,

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \text{karşı} \quad H_a : \theta \in \Theta_0^c$$

hipotez testi problemi için $\beta = P_\theta$ (İkinci tür hata) olmak üzere testin güç fonksiyonu,

$$\beta(\theta) = P_\theta(H_0 \text{ Red}) = \begin{cases} \alpha & , \quad \theta \in \Theta_0 \\ 1-\beta & , \quad \theta \in \Theta_0^c \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.

Örnek 9.3.1 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ beklenen değeri μ, varyansı 100 olan normal dağılımdan bir örneklem olsun. $H_0 : \mu = 100$ hipotezini $H_a : \mu > 100$ alternatif hipotezine karşı test etmek isteyelim. Birinci tür hata olasılığının en fazla 0.025 ve $\mu = 110$ için ikinci tür hata olasılığının da en fazla 0.05 (yani $\mu = 110$ da testin gücünün en az 0.95) olması arzu edildiğinde n örneklem hacmini yaklaşık olarak bulmak isteyelim.

Böyle bir problem için test istatistiğinin,

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1 & , \quad \bar{x}_n \geq c \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

şeklinde olduğunu biliyoruz (Örnek (9.2.1b)). Buna göre, testin birinci tür hata olasılığı için

$$\begin{aligned} 0.025 &= P(\text{Birinci Tür Hata}) = P_{\mu=100}(\bar{X}_n > c) \\ &= P_{\mu=100}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - 100)}{10} > \frac{\sqrt{n}(c-100)}{10} \right) = P\left(Z > \frac{\sqrt{n}(c-100)}{10} \right) \end{aligned}$$

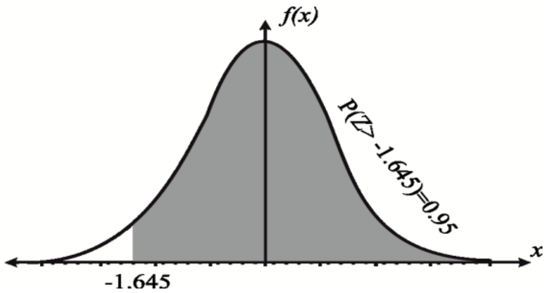
eşitliğinden $\sqrt{n}\left(c-100\right)/10 = 1.96$ bulunur. Yani, $c = 100 + (19.6/\sqrt{n})$ dir.

Ayrıca, testin gücünün en az 0.95 olması beklendiğinden, $\beta(110) = 0.95$ olması için,

$$0.95 = P_{\mu=110}\left(H_0 \text{ red}\right) = P_{\mu=110}\left(\bar{X}_n > c\right) = P_{\mu=110}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - 110)}{10} > \frac{\sqrt{n}(c-110)}{10} \right)$$

olup, normal dağılım tablosundan $\sqrt{n}\left(c-110\right)/10 = -1.645$ ya da $c = 110 - (16.45/\sqrt{n})$ bulunur. Buna göre, $100 + (19.6/\sqrt{n}) = 110 - (16.45/\sqrt{n})$ eşitliğinden $\sqrt{n} = 3.605$ ya da

$n = 12.996025$ bulunur. Ancak, n örneklem hacmi olduğundan bir tamsayı olmak zorundadır. Yani, $n = 13$ alınmalıdır.



Şekil 9.3.1 Örnek (9.3.1) deki hipotez testi problemine ait bölgenin alanı

O halde, birinci tür hata olasılığının en fazla 0.025 ve ikinci tür hata olasılığının da en fazla 0.05 olması için deneyin en az 13 defa tekrarlanması gerekir. Yani, $n = 13$ dür$\oplus$

Hata olasılıkları ve testin gücü hipotezlere ve parametrelere bağlı olduğu gibi, örneklem hacmine de bağlıdır. Bilindiği gibi, test kuralının belirlenmesi önemlidir. Bunun için de, önceden belirlenen bir α değeri testin anlam düzeyi olarak alınır ve c sabitinin değeri seçilen α değerine (birinci tür hata olasılığına) bağlı olarak belirlenmeye çalışılır. Buradaki c sayısına *testin kritik değeri* denir. Bu kritik değerler, normal dağılımlı kitleler için tablolardan bulunur. Bazen, örneklem hacmi yeterince büyük ve merkezi limit teoreminin koşulları geçerli ise, yine dağılım tabloları (beklenen değer için normal ve $t-$dağılım tabloları, varyans için ki-kare dağılım tablosu, varyansların karşılaştırılması gibi durumlarda da F dağılım tablosu) kullanılır. Diğer durumlarda bu kritik değerler ayrıca belirlenmelidir.

Örnek 9.3.2 $X_1, X_2, \dots, X_n$ parametresi θ olan ötelenmiş üstel dağılımdan (Örnek 9.2.3)) bir örneklem olsun. X lerin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x;\theta) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & , \quad x \ge \theta \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olup önceden belirlenen θ_0 sayısı için $H_0 : \theta \le \theta_0$ yokluk hipotezini $H_a : \theta > \theta_0$ alternatif hipotezine karşı test etmek isteyelim. $x_{(1)} = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olmak üzere test fonksiyonunu

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1 & , \quad x_{(1)} > c \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olarak yazmıştık (Örnek(9.2.3)). Buradaki c değerini belirlemek için, testin anlam düzeyi olan belirlenen bir α sayısı (birinci tür hata olasılığı) önceden belirlenir. Buradan da,

$$\alpha = P_{\theta_0}(H_0 \text{ Red}) = P_{\theta_0}(X_{(1)} > c) = e^{-n(c-\theta_0)}$$

eşitliğinden, $c=\theta_0 - n^{-1}\ln(\alpha)$ bulunur. Görüldüğü gibi, kritik değer n örneklem hacmi ile önceden belirlenen α sayısına bağlıdır$\oplus$

Testin gücü, parametrenin ve örneklem hacminin bir fonksiyonudur. Bu fonksiyon, bazen analitik olarak elde edilebilir. Bazen, parametrenin monoton artan veya azalan bir fonksiyonu olarak da karşımıza çıkabilir. Örneklem hacmi büyüdükçe testin gücü de artar.

Örnek 9.3.3 $N(\mu,\sigma^2)$ dağılımından bir örneklem $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ve σ^2 biliniyor olsun. $H_0 : \mu \le \mu_0$ yokluk hipotezinin $H_a : \mu > \mu_0$ alternatif hipotezine karşı test edilmesi problemini ele alalım. Bu problem için olabilirlik oran testi,

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1 & , \quad \sqrt{n}\,(\bar{x}_n - \mu_0)/\sigma > c \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

şeklindedir. Birinci tür hata olasılığı (testin anlam düzeyi) α önceden belirlenmiş olsun. Buna göre,

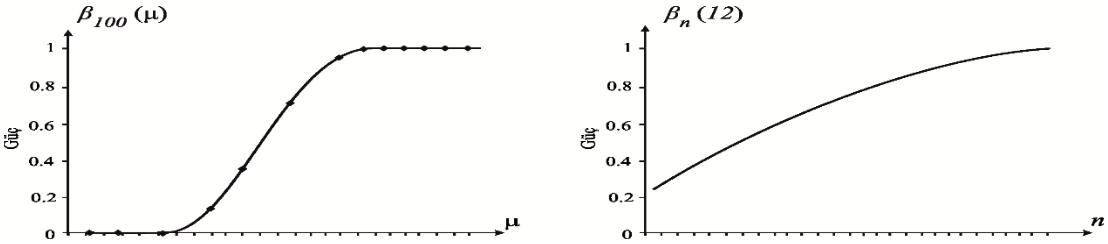
$$\alpha = P_{\mu_0}(H_0 \text{ Red}) = P_{\mu_0}(\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_0)/\sigma > c) = P(Z > c)$$

olup normal dağılım tablosundan $P(Z > z_\alpha) = \alpha$ olacak şekilde c sayısı ($c = z_\alpha$) belirlenir. Bu hipotez testi problemi için güç fonksiyonu,

$$\begin{aligned} \beta(\mu) &= P_\mu(H_0 \text{ Red}) = P_\mu(\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_0)/\sigma > z_\alpha) \\ &= P_\mu[\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma > z_\alpha - \sqrt{n}(\mu - \mu_0)/\sigma] = P(Z > z_\alpha - \sqrt{n}(\mu - \mu_0)/\sigma) \end{aligned}$$

eşitliğinden $\beta(\mu) = P(Z > z_\alpha - \sqrt{n}(\mu - \mu_0)/\sigma)$ şeklindedir. Önceden belirlenen α, n, σ^2 ve μ_0 değerleri yerine konarak güç fonksiyonunun değerleri, normal dağılım tablosundan bulunarak aşağıdaki tabloda verilmiştir. Testin güç fonksiyonunun grafiği de μ ve n ye göre aşağıdadır (Şekil (9.3.2)). Tablo ve grafiklerden de görüldüğü gibi, testin güç fonksiyonu μ ve n ye göre artandır. Güç fonksiyonu, örneklem hacmine göre artan olmasına rağmen, alternetif hipotezin yönüne bağlı olarak μ ye göre artan ya da azalan olabilir. Tablo değerleri $n = 100$, $\alpha = 0.05$, $\sigma^2 = 100$ ve $\mu_0 = 10$ için hazırlanmıştır.

μ	8	9	10	11	12	13	14
$\beta(\mu)$	0.00013	0.00408	0.04998	0.25946	0.63871	0.91229	0.99074
μ	15	16	17	18	19	20	
$\beta(\mu)$	0.9996	0.99999	1.000	1.000	1.000	1.000	



$n=100$ sabit, μ ye göre güç fonksiyonu *$\mu=12$ sabit, n ye göre güç fonkaiyonu*

Şekil 9.3.2 Güç Fonksiyonunun Grafiği

Açıkça görüldüğü gibi,

$$\beta(\mu_0)=P(Z>z_\alpha)=\alpha \text{ olup, } \lim_{\mu\to-\infty}\beta(\mu)=0 \text{ ve } \lim_{\mu\to\infty}\beta(\mu)=1$$

dir. $\alpha=0.05$ için $z_\alpha=1.645$ olup, $\mu_0=10$, $\sigma^2=100$ ve $\alpha=0.05$ için n örneklem hacmi sabit tutularak μ ye göre, $\mu=12$ sabit tutularak da n ye göre güç fonksiyonunun grafikleri Şekil (9.3.2) de verilmiştir. Her iki grafikte de güç fonksiyonu μ ve n nin artan bir fonksiyonudur.

Aynı örneklem dikkate alınarak, $H_0:\mu\geq\mu_0$ yokluk hipotezinin $H_a:\mu<\mu_0$ alternatif hipotezine karşı test edilmesi problemini ele alalım. Bu durumda test fonksiyonu,

$$\phi(\underset{\sim}{x})=\begin{cases}1 & , \quad \sqrt{n}\,(\bar{x}_n-\mu_0)/\sigma<c\\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

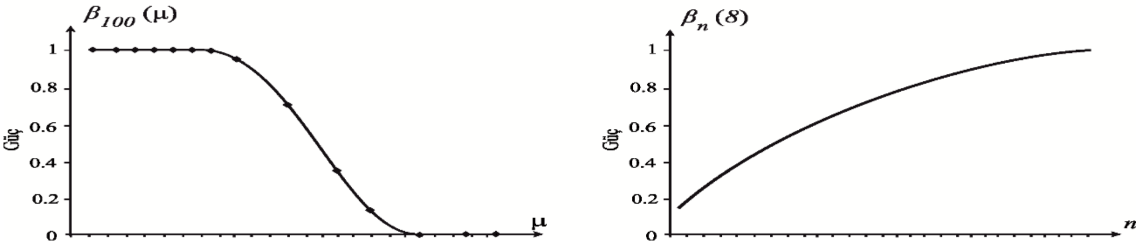
olup birinci tür hata olasılığı α nın önceden belirlendiğinde c kritik değeri,

$$\alpha=P_{\mu_0}(H_0 \text{ Red})=P_{\mu_0}(\sqrt{n}\,(\bar{X}_n-\mu_0)/\sigma<c)=P(Z>c)$$

eşitliğinden $c=-z_\alpha$ olarak belirlenir. Güç fonksiyonu ise,

$$\begin{aligned}\beta(\mu)&=P_\mu(H_0 \text{ Red})=P_\mu(\sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu_0)/\sigma<-z_\alpha)\\ &=P_\mu[\sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu)/\sigma<-z_\alpha-\sqrt{n}(\mu-\mu_0)/\sigma]=P(Z<-z_\alpha-\sqrt{n}(\mu-\mu_0)/\sigma)\end{aligned}$$

eşitliğinden $\beta(\mu)=P(Z<-z_\alpha-\sqrt{n}(\mu-\mu_0)/\sigma)$ şeklinde olur. Yine, $\alpha=0.05$ için $z_\alpha=1.645$ olup, $\mu_0=10$, $\sigma^2=100$ ve $\alpha=0.05$ için, n örneklem hacmi sabit tutularak μ ye göre, $\mu=12$ sabit tutularak n ye göre testin güç fonksiyonunun grafikleri (Şekil (9.3.3)) aşağıdadır. Burada güç fonksiyonu μ ye göre azalan, n örneklem hacmine göre artandır. Yani her iki durumda da testin güç fonksiyonu, n örneklem hacminin artan bir fonksiyonudur.



$n = 100$ *sabit,* μ *ye göre güç fonksiyonu* $\qquad$ $\mu = 8$ *sabit,* n *ye göre güç fonkaiyonu*

Şekil 9.3.3 Güç Fonksiyonunun Grafiği

Aynı örneklem kullanılarak, $H_0 : \mu = \mu_0$ yokluk hipotezinin $H_a : \mu \neq \mu_0$ alternatif hipotezine karşı test edilmesi problemi için test fonksiyonunun,

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1 & , \ |\sqrt{n}\,(\bar{x}_n - \mu_0)/\sigma| > c \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

şeklinde olduğunu biliyoruz. α birinci tür hata olasılığı önceden belirlendiğinde kritik değer normal dağılım tablosundan $c = z_{\alpha/2}$ olarak bulunur. $\Phi(x)$ standart normal rasgele değişkenin dağılım fonksiyonunu göstermek üzere testin güç fonksiyonu,

$$\beta(\mu) = P_\mu(H_0 \text{ Red}) = P_\mu(|\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_0)/\sigma| > z_{\alpha/2}) = 1 - P_\mu(|\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_0)/\sigma| \leq z_{\alpha/2})$$

$$= 1 - P_\mu\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_0)}{\sigma} \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - P_\mu\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu + \mu - \mu_0)}{\sigma} \leq z_{\alpha/2}\right)$$

$$= 1 - P_\mu\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_0)}{\sigma} \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - P_\mu\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu + \mu - \mu_0)}{\sigma} \leq z_{\alpha/2}\right)$$

$$= 1 - P_\mu\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\sqrt{n}(\mu - \mu_0)}{\sigma} + \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \leq z_{\alpha/2}\right)$$

$$= 1 - P_\mu\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\sqrt{n}(\mu - \mu_0)}{\sigma} \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \leq z_{\alpha/2} - \frac{\sqrt{n}(\mu - \mu_0)}{\sigma}\right)$$

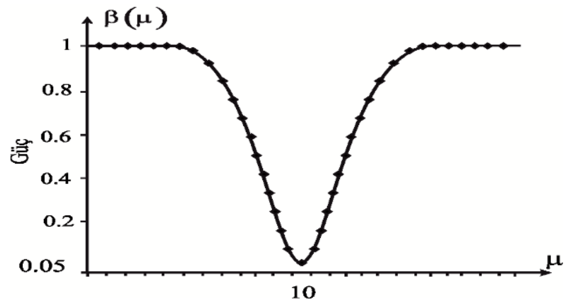
$$= 1 - P_\mu\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\sqrt{n}(\mu - \mu_0)}{\sigma} \leq Z \leq z_{\alpha/2} - \frac{\sqrt{n}(\mu - \mu_0)}{\sigma}\right)$$

$$= 1 - \left[\Phi\left(z_{\alpha/2} - \frac{\sqrt{n}(\mu - \mu_0)}{\sigma}\right) - \Phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\sqrt{n}(\mu - \mu_0)}{\sigma}\right)\right]$$

eşitliğinden

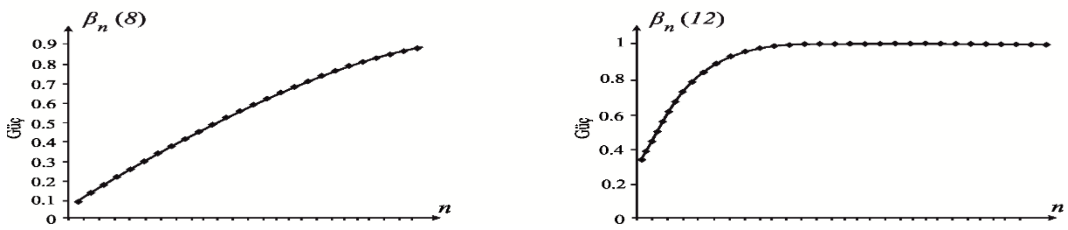
$$\beta(\mu) = 1 - P_\mu\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\sqrt{n}(\mu - \mu_0)}{\sigma} \leq Z \leq z_{\alpha/2} - \frac{\sqrt{n}(\mu - \mu_0)}{\sigma}\right)$$

olarak elde edilir.



Şekil 9.3.4 Çift yölü hipotez testi problemi için güç fonksiyonu

Testin güç fonksiyonunun grafiği yukarıda Şekil (9.3.4) de verilmiştir. Grafikten de görüldüğü gibi, güç fonksiyonu belli bir yere kadar azalmakta ($\mu = 10$ noktasına kadar) daha sonra artmaktadır. Fonksiyonun $\mu = 10$ noktasındaki değeri 0.05 dir



Testin gücü ($\mu = 8$ sabit) Testin gücü ($\mu = 12$ sabit)

Şekil 9.3.5 Güç fonksiyonunun grafiği

$\alpha = 0.05$ için $z_{\alpha/2} = 1.96$ olup, $n = 100$, $\mu_0 = 10$ ve $\sigma^2 = 100$ için güç fonksiyonu $\beta(\mu) = 1 - [\Phi(11.96 - \mu) - \Phi(8.04 - \mu)]$ şeklindedir. Alternatif hipotez ister $\mu < 10$ isterse $\mu > 10$ olsun, örneklem hacmi arttıkça testin gücü artar. Yukarıda, iki özel durumda için grafikler verilmiştir$\oplus$

Hipotez testlerinde, testin anlam düzeyi yani birinci tür hata olasılığı çok önemlidir. Hemen hemen bütün istatistiki sonuç çıkarımlar testin anlam düzeyine bağlıdır. Ayrıca testin anlam düzeyi güç fonksiyonunun H_0 hipotezi altındaki değeridir. Fonksiyonun H_0 hipotezi altındaki değerine göre $\alpha -$ düzeyli ve $\alpha -$ölçekli testler tanımlanır.

Tanım 9.3.3 Güç fonksiyonu $\beta(\theta)$ olan bir teste, $\sup_{\theta \in \Theta_0} \beta(\theta) = \alpha$ ise $\alpha -$*ölçekli* (size-α) *test*, $\sup_{\theta \in \Theta_0} \beta(\theta) \le \alpha$ ise $\alpha -$*düzeyli* (level-α) *test* denir$\otimes$

Örnek 9.3.4 a) Bir istatistik sınavından öğrencilerin aldığı notlar beklenen değeri μ , varyansı $\sigma^2 = 144$ olan normal dağılıma sahiptir. Aşağıda küçükten büyüğe sıralanmış veriler bulunmaktadır.

Rasgele seçilen 68 öğrencinin sınavda aldığı notlar

18	18	20	20	21	21	21	25	26	27	28	29	30	30
30	30	30	30	30	31	31	32	33	33	33	35	35	35
36	36	36	36	38	38	38	38	38	39	40	40	40	40
40	41	45	45	45	45	46	46	47	47	48	49	50	50
51	51	51	53	56	56	56	59	59	63	64	67		

Verilerden,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 2645 \text{ ve } \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 112211$$

değerleri hesaplanmıştır. $H_0 : \mu \leq 35$ yokluk hipotezi $H_a : \mu > 35$ alternatif hipotezine karşı $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinde testi problemi için test kuralı,

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1 & , \quad \sqrt{68}\,(\overline{x}_n - 35)/12 > 1.645 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

şeklinde olup $z_h = \sqrt{68}\,(\overline{x}_n - 35)/12 > 1.645$ ise H_0 yokluk hipotezi red edilir.

Buradan, $\overline{x}_n = 38.39$ olup, $z_h = \sqrt{68}\,(\overline{x}_n - 35)/12 = 2.68 > 1.645 = z_\alpha$ olduğundan $H_0 : \mu \leq 35$ yokluk hipotezi $H_a : \mu > 35$ alternatif hipotezine karşı red edilir. Testin güç fonksiyonu,

$$\beta(\mu) = P_\mu(H_0 \text{ Red}) = P(Z > 1.645 - \sqrt{68}(\mu - 35)/12)$$

şeklinde olup bazı μ değerleri için güç fonksiyonun değerleri aşağıdadır. Bu verilere göre, sınıf ortalamasının 35 den küçük ya da eşittir yokluk hipotezi $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinde $H_a : \mu > 35$ alternatif hipotezine karşı red edilmiştir. Hesaplanan ortalama $\overline{x}_n = 38.39$ olup testin bu noktadaki *(empirik) gücü* 0.85 dir.

μ	30	32	34	35	36	38	**38.39**	39	40
$\beta(\mu)$	0.00	0.00	0.0098	0.04995	0.169	0.66	***0.85***	0.87	0.96.

b) $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ parametresi θ olan Poisson dağılımından bir örneklem olmak üzere $H_0 : \theta = 0.1$ yokluk hipotezi $H_a : \theta > 0.1$ alternatif hipotezine karşı test edilmek istensin. Bu hipotez testi problemi için test kuralı da, $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ve Y nin gözlem değeri de y olmak üzere

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1 & , \quad y \geq 3 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

şeklinde verilmiş olsun. Yani, $y \geq 3$ ise $H_0 : \theta = 0.1$ hipotezi red edilecektir. Ayrıca, $Y \sim Poisson(1)$ olup testin anlam düzeyi,

$$\alpha = P\left(H_0 \text{ Red} | H_0 \text{ Doğru}\right) = P_{\theta=1}(Y \geq 3) = 1 - P_{\theta=1}(Y \leq 2)$$
$$= 1 - [P_{\theta=1}(Y=0) + P_{\theta=1}(Y=1) + P_{\theta=1}(Y=2)] = 1 - e^{-1}[5/2] \cong 0.08$$

olarak hesaplanır. Bu test yerine,

$$\phi_1(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1 & , \quad y \geq 4 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

alınmış olsaydı, testin anlam düzeyi bu defa

$$\alpha = P(H_0 \text{ Red} \,|\, H_0 \text{ Doğru}) = P_{\theta=1}(Y \geq 4) = 1 - P_{\theta=1}(Y \leq 3)$$
$$= 1 - [P_{\theta=1}(Y=0) + P_{\theta=1}(Y=1) + P_{\theta=1}(Y=2) + P_{\theta=1}(Y=3)] = 1 - e^{-1}[8/3] \cong 0.019$$

olacaktı. Böyle bir hipotez için $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinde bir test oluşturmak istendiğinde, bu testlerden ikisi de kullanılamaz. $D_Y = \{0,1,2,3,...\}$ olduğundan Y nin değerleri kesirli sayılar olarak da belirlenemez. Bu durumda, W örneklemden bağımsız başarı olasılığı p olan Bernoulli rasgele değişkeni olmak üzere test kuralını,

$$\phi_2(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1 & , \quad (y \geq 4) \text{ veya } (y = 3 \text{ ve } w = 1) \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Burada,

$$p = P(W=1) = \frac{0.05 - 0.019}{0.08 - 0.019} = \frac{31}{61}$$

olup $\phi_2(\underset{\sim}{x})$ testinin anlam düzeyi,

$$\alpha = P(H_0 \text{ Red} \,|\, H_0 \text{ Doğru}) = P_{\theta=1}(Y \geq 4) + P_{\theta=1}(Y = 3, W = 1)$$
$$= P_{\theta=1}(Y \geq 4) + P_{\theta=1}(Y=3)\,P(W=1) = 0.019 + (0.61)(31/61) \cong 0.05$$

olarak hesaplanır. Buna göre, $Y = 3$ gözlendiğinde H_0 yokluk hipotezi red edilir ya da red edilemez. Yani, $Y = 3$ gözlendiğinde $(31/61) \cong 0.5$ olasılıkla H_0 hipotezi red edilir. Bu tür testlere *rasgeleleştirilmiş* (*randomized*) testler denir⊕

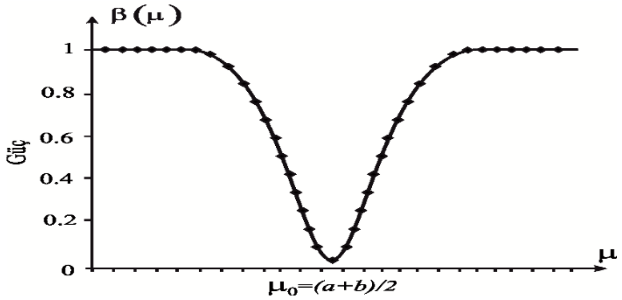
Örnek 9.3.5 $N(\mu, \sigma^2)$ dağılımından bir örneklem $X_1, X_2, \ldots, X_n$ olsun. $H_0 : \mu = \mu_0$ yokluk hipotezini $H_a : \mu \neq \mu_0$ alternatif hipotezine karşı test etmek için test fonksiyonu,

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1 & , \quad \overline{x}_n < a \text{ veya } \overline{x}_n > b \\ 0 & , \quad \text{d.y.} \end{cases}$$

şeklinde verilsin. Testin güç fonksiyonunun grafiği Şekil (9.3.6) de verilmiştir. Yani, güç fonksiyonu μ_0 noktasında en küçük değere ulaşır. Bu değer de testin anlam düzeyidir. Buradaki, a ve b sayıları önceden belirlenmiş olabilir. Böyle bir durumda, μ_0 değerini a ve b sayılarına bağlı olarak bulmak isteyelim. Φ standart normal rasgele değişkenin dağılım fonksiyonunu göstermek üzere testin güç fonksiyonu,

$$\beta(\mu)=\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)+\left[1-\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\right]$$

şeklindedir.



Şekil 9.3.6 Çitf yölü hipotez testi için güç fonksiyonunun grafiği

Daha açık olarak testin güç fonksiyonu,

$$\beta(\mu)=P_\mu(H_0\text{ Red})=P_\mu(\bar{X}_n<a\text{ veya }\bar{X}_n>b)=P_\mu(\bar{X}_n<a)+P_\mu(\bar{X}_n>b)$$

$$=P_\mu(\bar{X}_n<a)+[1-P_\mu(\bar{X}_n\le b)]=P\left(Z<\frac{a-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)+\left[1-P\left(Z\le\frac{b-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\right]$$

$$=\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)+\left[1-\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\right]$$

şeklinde hesaplanmıştır. Bu fonksiyonu minimum yapan değeri bulabilmek için fonksiyonun birinci türevi sıfıra eşitlenir. $Z\sim N(0,1)$ olmak üzere dağılım fonksiyonunun türevi olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Dolayısı ile güç fonksiyonunun türevi,

$$\beta'(\mu)=\Phi'\left(\frac{a-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)-\Phi'\left(\frac{b-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)=\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left[f_Z\left(\frac{b-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)-f_Z\left(\frac{a-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\right]$$

olup $\beta'(\mu)=0$ yazılarak $\beta(\mu)$ fonksiyonunu minimum (belki maksimum) yapan değer bulunur. Buradan,

$$\beta'(\mu)=0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left[f_Z\left(\frac{b-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)-f_Z\left(\frac{a-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\right]=0\Leftrightarrow f_Z\left(\frac{b-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)=f_Z\left(\frac{a-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

elde edilir. Dolayısı ile,

$$f_Z\left(\frac{b-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)=f_Z\left(\frac{a-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{b-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{a-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\exp\left(-\frac{n(b-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)=\exp\left(-\frac{n(a-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\Leftrightarrow(b-\mu)^2=(a-\mu)^2$$

denkliğindeki $(b-\mu)^2=(a-\mu)^2$ ifadesi düzenlenirse $\mu=(a+b)/2$ bulunur. Yani, $\beta(\mu)$ güç fonksiyonunu minimum yapan değer $\mu=(a+b)/2$ dir. Testin güç fonksiyonu μ_0 noktasında minimum olduğundan $\mu_0=(a+b)/2$ alınır (Bkz. Şekil (9.3.6)) $\oplus$