HAFTA 11

İKİ KİTLE ORTALAMASI FARKINA İLİŞKİN HİPOTEZ TESTLERİ

Uygulamada, iki kitlenin beklenen değerlerinin karşılaştırılması da varyansın bilinip bilinmemesi durumuna göre yukarıdaki gibi yapılır. $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ dağılımından bir örneklem $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ve bu örneklemden bağımsız $N(\mu_y, \sigma_y^2)$ dağılımından başka bir örneklem de $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ olsun. $H_0 : \mu_x = \mu_y$ yokluk hipotezinin (veya $H_0 : \mu_x - \mu_y = 0$ hipotezinin) $H_a : \mu_x > \mu_y$, $H_a : \mu_x < \mu_y$ ve $H_a : \mu_x \neq \mu_y$ alternatif hipotezlerine karşı testi problemini inceleyelim. $\mu = \mu_x - \mu_y$ denirse, problem $H_0 : \mu = 0$ yokluk hipotezinin $H_a : \mu > 0$, $H_a : \mu < 0$ ve $H_a : \mu \neq 0$ alternatif hipotezlerine karşı test edilmesine dönüşür. Buradan,

$$E(\bar{X}_n - \bar{Y}_m) = E(\bar{X}_n) - E(\bar{Y}_m) = \mu_x - \mu_y = \mu$$

ve

$$Var(\bar{X}_n - \bar{Y}_m) = Var(\bar{X}_n) + Var(\bar{Y}_m) = (\sigma_x^2 / n) + (\sigma_y^2 / m)$$

olduğundan,

$$\bar{X}_n - \bar{Y}_m \sim N(\mu_x - \mu_y,\ (\sigma_x^2 / n) + (\sigma_y^2 / m))$$

ve

$$(\bar{X}_n - \bar{Y}_m) / \sqrt{(\sigma_x^2 / n) + (\sigma_y^2 / m)} \sim N(0,1)$$

dir. Ayrıca $(\bar{X}_n - \bar{Y}_m) / \sqrt{(\sigma_x^2 / n) + (\sigma_y^2 / m)}$ istatistiğinin gözlenen değerini

$$z_h = (\bar{x}_n - \bar{y}_m) / \sqrt{(\sigma_x^2 / n) + (\sigma_y^2 / m)}$$

ile gösterelim.

A) Her iki kitlenin de varyansı biliniyor olsun. Bu durumda,

1. $H_0 : \mu_x = \mu_y$ yokluk hipotezi $H_a : \mu_x > \mu_y$ alternatif hipotezine karşı $\alpha-$anlam düzeyinde testi için test kuralı "$z_h > z_\alpha$ ise H_0 yokluk hipotezi red edilir" şeklinde olur.

2. $H_0 : \mu_x = \mu_y$ hipotezi $H_a : \mu_x < \mu_y$ alternatif hipotezine karşı $\alpha-$anlam düzeyinde test edilmek istendiğinde ise test kuralı "$z_h < -z_\alpha$ için H_0 hipotezi red edilir" şeklindedir.

3. $H_0 : \mu_x = \mu_y$ hipotezi $H_a : \mu_x \neq \mu_y$ alternatif hipotezine karşı $\alpha-$anlam düzeyinde test edilmek istenirse, test kuralı "$| z_h | > z_{\alpha/2}$ ise H_0 yokluk hipotezi red edilir" şeklinde oluşturulur.

B) Kitlelerin varyansları bilinmiyor olsun. Bu durumda, kitle varyanslarının durumuna göre uygulanacak testler farklılıklar gösterir. Kitle varyansları aynı ($\sigma_x^2 = \sigma_y^2$) ise varyans gerek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ gerekse $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ örneklem değerlerinden tahmin edilebilir. Ancak, her iki kitlenin de varyansı aynı olduğundan varyansı iki örneklem de kullanılarak (toplam $n+m$ örnek değer ile) tahmin edildiğinde daha iyi bir sonuç vermesi beklenir. Buna göre, σ^2 yi $X_1, X_2, \ldots, X_n$ örnekleminden $S_{n,X}^2$ ile, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ örnekleminden de $S_{m,Y}^2$ ile tahmin ederiz. Bu iki örneklemin beraber kullanılması halinde ise σ^2,

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_{n,X}^2 + (m-1)S_{m,Y}^2}{n+m-2}$$

ile tahmin edilir. İki örneklem bir birinden bağımsız olduğundan S_P^2 de σ^2 nin yansız bir tahmin edicisidir. Diğer taraftan, $Var(\bar{X}_n - \bar{Y}_m) = (\sigma_x^2 / n) + (\sigma_y^2 / m) = \sigma^2((1/n) + (1/m))$ olup, $[(\bar{X}_n - \bar{Y}_m) - (\mu_x - \mu_y)] / [S_p\sqrt{(1/n) + (1/m)}\,] \sim t_{n+m-2}$ dir. Buna göre,

$$t_h = [(\bar{x}_n - \bar{y}_m) - (\mu_x - \mu_y)] / [s_p\sqrt{(1/n) + (1/m)}\,]$$

olmak üzere,

1. $H_0 : \mu_x = \mu_y$ yokluk hipotezinin $H_a : \mu_x > \mu_y$ alternatif hipotezine karşı $\alpha-$anlam düzeyinde testi problemi için test kuralı "$t_h > t_{n+m-2}(\alpha)$ ise H_0 hipotezi red edilir" şeklindedir.

2. $H_0 : \mu_x = \mu_y$ yokluk hipotezi $H_a : \mu_x < \mu_y$ alternatif hipotezine karşı $\alpha-$anlam düzeyinde test edilmek istenirse test kuralı "$t_h < -t_{n+m-2}(\alpha)$ ise H_0 hipotezi red edilir" şeklinde oluşturulur.

3. $H_0 : \mu_x = \mu_y$ yokluk hipotezi $H_a : \mu_x \neq \mu_y$ alternatif hipotezine karşı $\alpha-$anlam düzeyinde test edilmek istendiğinde test kuralı, "$|t_h| > t_{n+m-2}(\alpha/2)$ ise H_0 yokluk hipotezi red edilir" şeklinde olur.

Örnek 9.1.2 Bir istatistik dersinin sınavı aynı anda iki farklı gruba uygulansın. Bu gruplardan rasgele seçilen 16 şar öğrencinin sınav notları aşağıda verilmiştir.

A Grubu (X)								B Grubu (Y)							
60	65	60	70	75	80	65	69	70	72	65	64	50	62	67	66
83	78	63	67	69	73	79	67	49	84	73	67	48	66	63	72

Verilere ait bazı özet bilgiler;

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1123\,, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 79587\,, \quad \overline{x}_n = 70.1875\,, \quad s_{n,X}^2 = 51.095$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 1038\,, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 68682\,, \quad \overline{y}_m = 64.8750, \quad s_{m,Y}^2 = 89.45$$

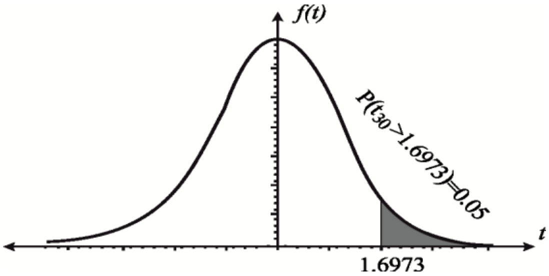
ve

$$s_p^2 = \frac{(n-1)s_{n,X}^2 + (m-1)s_{m,Y}^2}{n+m-2} = \frac{(16-1)s_{n,X}^2 + (16-1)s_{m,Y}^2}{(16+16)-2} = \frac{s_{n,X}^2 + s_{m,Y}^2}{2} = 70.27$$

olarak hesaplanmıştır. Buna göre, birleştirilmiş standart hata $s_p = 8.38$ olup $H_0 : \mu_x = \mu_y$ yokluk hipotezinin $H_a : \mu_x > \mu_y$ alternatif hipotezine karşı testi problemini ele alalım. Test istatistiğinin değeri,

$$t_h = \frac{(\overline{x}_n - \overline{y}_m) - (\mu_x - \mu_y)}{s_p\sqrt{(1/n)+(1/m)}} = \frac{(70.1875-64.8750)}{8.38\sqrt{(1/16)+(1/16)}} = \frac{\sqrt{16}\left(70.1875-64.8750\right)}{8.38\sqrt{2}} \cong 1.8$$

olup, kritik değer $\alpha = 0.05$ için $t-$dağılım tablosundan $t_{30}(0.05) = 1.6973$ olarak bulunur. Buna göre, $t_h = 1.8 > 1.6973 = t_{30}(\alpha)$ olduğundan, $H_0 : \mu_x = \mu_y$ hipotezi $H_a : \mu_x > \mu_y$ alternatif hipotezine karşı $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinde red edilir. Bu hipotez testi problemine ait testin red bölgesi ve red bölgesinin alanı Şekil (9.1.5) de verilmiştir.



Şekil 9.1.5 Örnek (9.1.2) deki hipotez testi propblemi için testin red bölgesi ve red bölgesinin alanı ($\alpha = 0.05$*)*

Yani, $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinde birinci grup ikinci gruba göre ortalamada daha iyidir (daha yüksek beklenen değere sahiptir) $\oplus$

C) Bir önceki örnekte, iki kitlenin varyanslarının aynı olduğu kabul edildi. Kitle varyansları farklı ise, başka testlerin uygulanması gerektiğini söylemiştik. Öyleyse, böyle bir test yapılmadan önce, kitle varyanslarının aynı olup olmadığının sınanması ($H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_x^2$ yokluk hipotezinin $H_a : \sigma_x^2 \neq \sigma_x^2$ alternatif hipotezine karşı test edilmesi) gerekir. Bunun için, $S_{n,X}^2$ ve $S_{m,Y}^2$ örneklem varyanslarının oranına bakmak yeterlidir. $S_{n,X}^2$ ve $S_{m,Y}^2$ oranlarının dağılımının serbestlik dereceleri $n-1$ ve $m-1$ olan F olduğunu biliyoruz. $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ yokluk hipotezi altında (ortak varyansa σ^2 diyelim),

$$F = \frac{S_{n,X}^2}{S_{n,Y}^2} = \frac{[(n-1)S_{n,X}^2 / \sigma^2]/(n-1)}{[(m-1)S_{m,Y}^2 / \sigma^2]/(m-1)} \sim F\left(n-1, m-1\right)$$

dir. Burada, F istatistiği $F = \max\{S_{n,X}^2, S_{m,Y}^2\} / \min\{S_{n,X}^2, S_{m,Y}^2\}$ olarak alındığında, maksimuma karşılık gelen serbestlik derecesi df_1, minimum olana karşılık gelen serbestlik derecesi de df_2 olmak üzere, $F = \max\{S_{n,X}^2, S_{m,Y}^2\} / \min\{S_{n,X}^2, S_{m,Y}^2\} \sim F(df_1, df_2)$ olur.

Buradan, $\alpha-$anlam düzeyinde, $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ hipotezi $H_a : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$ alternatif hipotezine karşı test edilmek istenirse, F istatistiğinin gözlem (hesaplanan) değeri $s_{n,X}^2$ ve $s_{m,Y}^2$ örneklem varyanslarının hesaplanan değerleri ve $F_h = \max\{s_{n,X}^2, s_{m,Y}^2\} / \min\{s_{n,X}^2, s_{m,Y}^2\}$ olmak üzere, $F_h > F^{1-\alpha/2}(df_1, df_2)$ ise $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ yokluk hipotezi red edilir. Yani kitle varyansları farklıdır.

Yukarıdaki örnekte (Örnek (9.1.2)) varyansların eşit olduğu varsayılmış ve varyanslar $s_{n,X}^2 = 51.095$ ve $s_{m,Y}^2 = 89.45$ olarak gözlenmişti. Buradan,

$$F_h = \frac{\max\{s_{n,X}^2, s_{m,Y}^2\}}{\min\{s_{n,X}^2, s_{m,Y}^2\}} = \frac{\max\{51.095\ , 89.45\}}{\min\{51.095\ , 89.45\}} = \frac{89.45}{51.095} = 1.75 < 2.40 = F^{0.95}(15,15)$$

olduğundan $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ yokluk hipotezi red edilemez. Yani, varyansların aynı olduğu varsayımı istatistiki olarak anlamlıdır.

Aynı kitle üzerinden, farklı zamanlarda iki ayrı deneyin yapıldığını düşünelim. Örneğin, bir istatistik dersinde öğrencilerin arasınav ortalamaları ile belli bir süre sonra uygulanan final sınavlarının ortalamalarının karşılaştırılması, öğrencilerin başarılarında bir gelişmenin olup olmadığının sınanmasıdır. Bu durumda, verileri iki ayrı veri gibi değerlendirmek yerine, aradaki farkların sıfır olduğunun test edilmesi daha anlamlı olur (belli bir artış da dikkate alınabilir). Bununla ilgili aşağıdaki örneği ele alalım.

Örnek 9.1.3 Bir istatistik dersinden rasgele seçilen 16 öğrencinin arasınav ve final notları aşağıdadır. Buna göre, arasınavdan sonra öğrencilerin başarılarında bir artış olup olmadığını $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinde test etmek isteyelim. İki ayrı örnek aynı kitle üzerinden alındığı için, varyansları karşılaştırmaya gerek yoktur. Elde edilen farklardan oluşan verilere ait varyans tahmininin dikkate alınması yeterlidir. Öğrencilerin başarılarında bir gelişmenin sınanması demek,

$H_0:\mu_x=\mu_y$ yokluk hipotezinin $H_a:\mu_x<\mu_y$ (veya $H_a:\mu_x>\mu_y$) alternatif hipotezine karşı test edilmesi demektir. Bu problem yerine, $Z_i=Y_i-X_i$ fark verileri ($H_0:\mu_x=\mu_y$ hipotezi altında $E(\bar{X}_n-\bar{Y}_n)=0$) kullanılarak $Z_1,Z_2,\ldots,Z_n$ örneklemine göre, $H_0:\mu=0$ hipotezi $H_a:\mu>0$ (veya $H_a:\mu<0$) alternatif hipotezine karşı test edilir.

Arasınav, X						Final, Y						Fark, $Z=Y-X$					
70	72	65	64	50	62	60	65	60	70	75	80	-10	-7	-5	6	25	18
67	66	49	84	73	67	65	69	83	78	63	67	-2	3	34	-6	-10	0
48	66	63	72			69	73	79	67			21	7	16	-5		

Buna göre, fark verilerine ait gözlenen örneklem ortalama ve varyansı

$$\bar{z}_n=5.3125 \text{ ve } s_z^2=(1/15)\sum_{i=1}^{16}\left(z_i-\bar{z}_n\right)^2=185.56$$

olarak hesaplanmıştır. $\alpha=0.05$ için tablo değeri $t_{15}(0.05)=1.753$ olup

$$t_h=\sqrt{n}\,\bar{z}_n/s_z=4(5.3125)/13.62=1.56<1.753=t_{15}(0.05)$$

olduğundan $H_0:\mu=0$ hipotezi $H_a:\mu>0$ alternatif hipotezine karşı red edilemez. Yani, öğrencilerin arasınav ortalamaları ile final ortalamaları aynıdır. Başka bir deyişle, öğrenciler arasınavdan sonra başarılarını geliştirmek için hiçbir çaba göstermemiştir. Ayrıca, $|t_h|=1.56<2.131=t_{15}(0.025)$ olduğundan $H_0:\mu=0$ hipotezi, aynı anlam düzeyinde $H_a:\mu\neq 0$ alternatif hipotezine karşı da red edilemez$\oplus$

Örnek 9.5.3 a) $N(\mu,\sigma^2)$ dağılımından bir örneklem $X_1,X_2,\ldots,X_n$ olsun. Önceden belirlenen bir μ_0 sayısı için $H_0:\mu\le\mu_0$ hipotezini $H_a:\mu>\mu_0$ alternatif hipotezine karşı test etmek isteyelim. $\bar{X}_n$ örneklem ortalaması μ için yeterli olup dağılımı normaldir. Yani, $\bar{X}_n\sim N(\mu,\sigma^2/n)$ olup normal dağılımlar ailesi üstel ve tamdır. Ayrıca, normal dağılımlar ailesi MLR özelliğine sahiptir (Örnek (9.5.2b)). Buradan Teorem (9.5.2) ye göre,

$$\phi(\underset{\sim}{x})=\begin{cases}1 & , \quad \bar{x}_n>c\\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

şeklindeki bir test $\alpha-$düzeyli düzgün en güçlü testtir. Burada, $P(Z>z_\alpha)=\alpha$ olmak üzere,

$$\alpha=P_{\mu_0}(\bar{X}_n>c)=P_{\mu_0}[\sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu_0)/\sigma>\sqrt{n}(c-\mu_0)/\sigma]=P(Z>\sqrt{n}(c-\mu_0)/\sigma)$$

eşitliğinden c sabitinin değeri $\alpha=P(Z>\sqrt{n}(c-\mu_0)/\sigma)$ olacak şekilde normal dağılım tablosundan belirlenir. Yani, $z_\alpha=\sqrt{n}(c-\mu_0)/\sigma$ olup $c=\mu_0+\sigma z_\alpha/\sqrt{n}$ dir. Buradan bu hipotez testi problemi için,

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1 & , \quad \bar{x}_n > \mu_0 + \sigma z_\alpha / \sqrt{n} \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

veya buna denk olan

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1 & , \quad \sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)/\sigma > z_\alpha \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

şeklindeki bir test $\alpha-$düzeyli düzgün en güçlü testtir.

Örnek 9.5.4 $N(\mu,\sigma^2)$ dağılımından bir örneklem $X_1, X_2, \ldots, X_n$ olsun. Önceden belirlenen bir μ_0 sayısı için $H_0 : \mu = \mu_0$ hipotezinin $H_a : \mu \neq \mu_0$ alternatif hipotezine karşı testi problemini ele alalım.

Bu problem için düzgün en güçlü test bulunamaz. Bir an için düzgün en güçlü testin bulunduğunu varsayalım. $\mu_1 < \mu_0$ olacak şekilde μ_1 belirlendiğinde, önceden belirlenen bir α sayısı (birinci tür hata olasılığı vaya testin anlam düzeyi) için,

$$\phi_1(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1 & , \quad \bar{x}_n < \mu_0 - \sigma z_\alpha / \sqrt{n} \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

testi μ_1 noktasında en yüksek güce sahiptir. Yani, düzgün en güçlü test varsa bu ϕ_1 olacaktır. Ayrıca,

$$\phi_2(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1 & , \quad \bar{x}_n > \mu_0 + \sigma z_\alpha / \sqrt{n} \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

testi verilmiş olsun. Bu test de $\alpha-$düzeylidir. Şimdi, $\mu_2 > \mu_1$ olacak şekilde bir μ_2 noktası belirleyelim. $\beta_1(\mu)$ ve $\beta_2(\mu)$ bu testlerin sırası ile güç fonksiyonlarını göstersin. Buradan, bu iki testin güç fonksiyonları arasında

$$\begin{aligned} \beta_2(\mu_2) &= P_{\mu_2}(\bar{X}_n > \mu_0 + \sigma z_\alpha / \sqrt{n}) \\ &= P(Z > z_\alpha + \sqrt{n}(\mu_0 - \mu_2)) \,, \quad \mu_0 - \mu_2 < 0 \text{ olduğundan} \\ &> P(Z > z_\alpha) = P(Z < -z_\alpha) \,, \quad \mu_0 - \mu_2 < 0 \text{ olduğundan} \\ &> P_{\mu_2}(\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_2)/\sigma < -z_\alpha) = P_{\mu_2}(\bar{X}_n < -\sigma z_\alpha / \sqrt{n} + \mu_0) \\ &= \beta_1(\mu_2) \end{aligned}$$

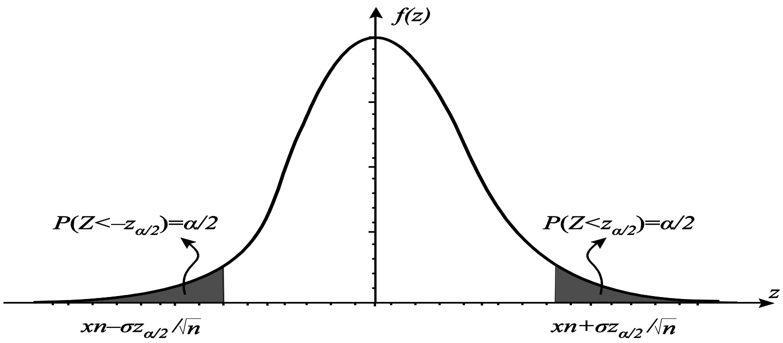
şeklinde bir karşılaştırma yapılabilir. Bu ise bir çelişkidir. Çünkü, böyle bir hipotez testi problemi için düzgün en güçlü test varsa bunun ϕ_1 olması gerektiğini söyledik. Oysa, aynı noktada gücü ϕ_1 in gücünden daha fazla olan bir ϕ_2 testi bulundu ($\beta_2(\mu_2) > \beta_1(\mu_2)$). O halde böyle bir problem için düzgün en güçlü test bulunamaz$\oplus$

Testin gücü ve kritik değeri birinci tür hata olasılığına bağlıdır.

9.6. Güven Aralıkları

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ parametresi θ olan kitleden bir örneklem ise, θ yı tahmin etmek için örneklemin bir fonksiyonu olan T rasgele değişkeni kullanıldı. T nin değerine de θ nın bir tahmini demiştik. Θ parametre kümesini göstermek üzere T nin değeri parametre kümesinde bir noktadır ($T(\underset{\sim}{x}) \in \Theta$).

Güven aralıkları ile hipotez testleri arasında yakın bir ilişki vardır. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ beklenen değeri μ, varyansı σ^2 olan normal dağılımdan bir örneklem olsun. $H_0 : \mu = \mu_0$ hipotezinin $H_a : \mu \neq \mu_0$ alternatifine karşı α anlam düzeyinde testi için test kuralının “ $z_h = \sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)/\sigma$ olmak üzere, $|z_h| > z_{\alpha/2}$ ise H_0 hipotezi red edilir” şeklinde olduğunu biliyoruz.



Şekil 9.6.1 Güven aralığı ile çift yölü hipotez testi arasındaki ilişki

Yani, $-z_{\alpha/2} \leq z_h \leq z_{\alpha/2}$ ise H_0 red edilemez. Burada, z_h nin değeri yerine konulduğunda

$$\bar{x}_n - (\sigma/\sqrt{n})\, z_{\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{x}_n + (\sigma/\sqrt{n})\, z_{\alpha/2}$$

şeklinde bir eşitsizlik elde edilir. Şekil (9.6.1) de görüldüğü gibi z_h değeri taralı alan içinde ($z_h < \bar{x}_h - \sigma z_{\alpha/2}/\sqrt{n}$ veya $z_h > \bar{x}_h + \sigma z_{\alpha/2}/\sqrt{n}$) kalıyorsa $H_0 : \mu = \mu_0$ red edilir. Buna göre, aralığın μ parametresini içermesi olasılığı $1-\alpha$ dır. Böylece, μ için $1-\alpha$ lık güven aralığı,

$$(\bar{x}_h - \sigma z_{\alpha/2}/\sqrt{n}\ ,\ \bar{x}_h + \sigma z_{\alpha/2}/\sqrt{n})$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 9.6.1 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x;\theta)$ olan kitleden bir örneklem olsun. $L(\underset{\sim}{X}) \leq U(\underset{\sim}{X})$ eşitsizliğini sağlayan $[L(\underset{\sim}{X}), U(\underset{\sim}{X})]$ rasgele aralığına θ için bir *aralık tahmin edicisi* denir$\otimes$

Tanımdaki kapalı aralık yerine $(-\infty, U(\underset{\sim}{X})]$ gibi tek taraflı aralık tahmin ediciler (Öztürk ve diğerleri, 2006, sayda 252) de kullanılabilir.

Örnek 9.6.1 $X_1, X_2, \dots, X_n$ beklenen değeri μ, varyansı σ^2 olan normal dağılımdan bir örneklem olsun. $\overline{X}_n$, μ için arzu edilen birçok istatistiki özelliği sağlar. μ için $a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $[\overline{X}_n - a, \overline{X}_n + a]$ gibi bir güven aralığını ele alalım. Bu durumda örtme olasılığı,

$$P_\mu(\mu \in [\overline{X}_n - a, \overline{X}_n + a]) = P_\mu(\overline{X}_n - a \le \mu \le \overline{X}_n + a) = P_\mu(-a \le \overline{X}_n - \mu \le a)$$
$$= P_\mu\left(-a\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} \le a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = P\left(-a\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le Z \le a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

şeklindedir. Bu örtme olasılığı parametreye bağlı değildir. Dolayısı ile,

$$\inf_{\mu \in \mathbb{R}} P_\mu(\mu \in [\overline{X}_n - a, \overline{X}_n + a]) = P\left(-a\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le Z \le a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

dir. Bazı durumlarda, örtme olasılığı parametreye bağlı olabilir (Öztürk ve diğer., 2006, s. 253)$\oplus$

Örnek 9.6.2 Hipotez testleri ile güven aralıkları arasında, her test fonksiyonuna bir güven aralığı, her güven aralığına da bir test fonksiyonu karşılık gelecek şekilde bir bağ kurulabilir. $N(\mu, \sigma^2)$ dağılımından bir örneklem $X_1, X_2, \dots, X_n$ olsun. Önceden belirlenen bir μ_0 için $H_0 : \mu = \mu_0$ hipotezinin $H_a : \mu \ne \mu_0$ alternatif hipotezine karşı testi problemi için, $z_h = \sqrt{n}(\overline{x}_n - \mu_0)/\sigma$ olmak üzere, α anlam düzeyli testin

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1 & , \quad |z_h| > z_{\alpha/2} \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

şeklinde verildiğini biliyoruz. Bu testin red bölgesi, $\mathcal{R} = \{\underset{\sim}{x} : |z_h| > z_{\alpha/2}\}$ olup $H_0 : \mu = \mu_0$ hipotezinin kabul bölgesi

$$\{\underset{\sim}{x} : |z_h| \le z_{\alpha/2}\} = \{\underset{\sim}{x} : |\sqrt{n}(\overline{x}_n - \mu_0)/\sigma| \le z_{\alpha/2}\} = \left\{\underset{\sim}{x} : \overline{x}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \le \mu_0 \le \overline{x}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right\}$$

dir. Ayrıca,

$$P_{\mu_0}\left(\left\{\underset{\sim}{x} : \overline{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \le \mu_0 \le \overline{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right\}\right) = 1 - \alpha$$

olup bu ifade her $\mu_0 \in \mathbb{R}$ için geçerli olduğundan,

$$P_{\mu_0}\left(\left\{\underset{\sim}{x} : \overline{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \le \mu \le \overline{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right\}\right) = 1 - \alpha$$

veya

$$P_{\mu_0}\left(\left\{\underset{\sim}{x} : \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \le \overline{X}_n \le \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right\}\right) = 1 - \alpha$$

dir. Yani, μ için $1-\alpha$ güven katsayılı güven aralığı

$$\left[\overline{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\ ,\ \overline{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right]$$

şekildedir. Buradan, $\overline{X}_n$ örneklem ortalamasının $\overline{x}_n$ gözlem değeri için güven aralığı,

$$\left[\overline{x}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\ ,\ \overline{x}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right]$$

olarak yazılır ⊕

Güven aralıkları ile ilgili, varyansın bilinip veya bilinmediği durumlara göre normal dağılımın beklenen değeri ve varyansı için güven aralıklarının nasıl yazılacağı aşağıda özetlenmiştir. Bu güven aralıkları birçok temel istatistik kitabında bulunabilir.

a) σ^2 biliniyor ise, μ için $1-\alpha$ güven katsayılı güven aralığı,

$$[\overline{x}_n - \sigma z_{\alpha/2} / \sqrt{n}\ ,\ \overline{x}_n + \sigma z_{\alpha/2} / \sqrt{n}]$$

dır.

b) σ^2 bilinmiyorsa, μ için $1-\alpha$ güven katsayılı güven aralığı da

$$[\overline{x}_n - s_n\, t_{n-1}(\alpha/2) / \sqrt{n}\ ,\ \overline{x}_n + s_n\, t_{n-1}(\alpha/2) / \sqrt{n}]$$

şeklinde yazılır.

c) σ^2 için $1-\alpha$ güven katsayılı güven aralığı ise

$$\left[\frac{(n-1)\,s_n^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}\ ,\ \frac{(n-1)\,s_n^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}\right]$$

olarak verilir.

d) Benzer şekilde, normal dağılımlı iki kitlenin beklenen değerleri arasındaki fark ($\mu_x - \mu_y$) için $1-\alpha$ güven katsayılı güven aralığı (varyansların biliniyor olması halinde),

$$\left[(\overline{x}_n - \overline{y}_m) - z_{\alpha/2}\sqrt{(\sigma_x^2/n) + (\sigma_y^2/m)},\ (\overline{x}_n - \overline{y}_m) + z_{\alpha/2}\sqrt{(\sigma_x^2/n) + (\sigma_y^2/m)}\right],$$

varyanslar bilinmiyor ($\sigma_x^2 = \sigma_y^2 \equiv \sigma^2$) ise,

$$[(\overline{x}_n - \overline{y}_m) - s_p\sqrt{(1/n)+(1/m)}\ \ t_{n+m-2}(\alpha/2),\ (\overline{x}_n - \overline{y}_m) + s_p\sqrt{(1/n)+(1/m)}\ \ t_{n+m-2}(\alpha/2)]$$

şeklindedir. Burada, $S_p^2 = ((n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2)/(n+m-2)$ dir.

Örnek 9.6.3. Bir istatistik dersinin A grubundaki öğrencilerin notları $N(\mu_a, \sigma_a^2)$, B grubundaki öğrencilerin notları da $N(\mu_b, \sigma_b^2)$ dağılımlarına uygun olsun. Bu gruplardan rasgele seçilen 25 öğrencinin notları aşağıda verilmiştir.

A Grubu Notları								B Grubu Notları							
60	61	70	58	56	65	69	74	71	68	65	70	84	79	74	97
72	85	81	56	72	73	73	71	68	72	76	70	81	71	73	78
87	56	74	72	67	67	71	49	76	78	71	72	57	86	81	66
64								81							

Bu verilereden $\bar{x}_n = 68.12$, $s_x^2 = 85.1933$, $\bar{y}_n = 74.6$ ve $s_y^2 = 64.5833$ özet bilgileri elde edilmiştir.

a) Varyanslar biliniyor ($\sigma_a^2 = \sigma_b^2 = 81$) ise μ_a ve μ_b parametreleri için %95 lik (yani, $\alpha = 0.05$ için %95 güven katsayılı) güven aralıklarını oluşturalım. $\alpha = 0.05$ için, $P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2 = 0.025$ için normal dağılım tablosundan $z_{\alpha/2} = 1.96$ dir. Buna göre,

i) μ_a için %95 lik güven aralığı: $[\bar{x}_n - \sigma z_{\alpha/2}/\sqrt{n},\ \bar{x}_n + \sigma z_{\alpha/2}/\sqrt{n}]$ olup değerler yerine konulduğunda aralık,

$$[\bar{x}_n - \sigma z_{\alpha/2}/\sqrt{n}, \bar{x}_n + \sigma z_{\alpha/2}/\sqrt{n}] = [68.12 - 9(1.96)/5\ ,\ 68.12 + 9(1.96)/5] = [64.592, 71.648]$$

olur.

ii) μ_b için %95 lik güven aralığı: $[\bar{y}_n - \sigma z_{\alpha/2}/\sqrt{n},\ \bar{y}_n + \sigma z_{\alpha/2}/\sqrt{n}]$ olup değerler yerine konulduğunda bu aralık da,

$$[\bar{y}_n - \sigma z_{\alpha/2}/\sqrt{n}, \bar{y}_n + \sigma z_{\alpha/2}/\sqrt{n}] = [74.6 - 9(1.96)/5, 74.6 + 9(1.96)/5] = [71.072, 78.128]$$

olarak belirlenir.

b) Varyansların bilinmediği durumda μ_a ve μ_b parametreleri için %95 lik ($\alpha = 0.05$ için 0.95 güven katsayılı) güven aralığı yazalım. $\alpha = 0.05$ için, $P(t > t_{n-1}(\alpha/2)) = 0.025$ ise $t-$dağılım tablosundan $t_{24}(0.025) = 2.064$ bulunur.

i) μ_a için %95 lik güven aralığı: $[\bar{x}_n - s_x t_{n-1}(\alpha/2)/\sqrt{n}\ ,\ \bar{x}_n + s_x t_{n-1}(\alpha/2)/\sqrt{n}]$ olup değerler yerine konulduğunda μ_a için %95 lik güven aralığı,

$$[\bar{x}_n - s_x t_{n-1}(\alpha/2)/\sqrt{n}\ ,\ \bar{x}_n + s_x t_{n-1}(\alpha/2)/\sqrt{n}]$$
$$= [68.12 - (9.23)(2.064)/5\ ,\ 68.12 - (9.23)(2.064)/5] = [64.031\ ,\ 71.93]$$

olur.

ii) μ_b için %95 lik güven aralığı: $[\bar{y}_n - s_y\, t_{n-1}(\alpha/2)/\sqrt{n}\ ,\ \bar{y}_n + s_y\, t_{n-1}(\alpha/2)/\sqrt{n}]$ olup değerler yerine konulduğunda μ_b için %95 lik güven aralığı da,

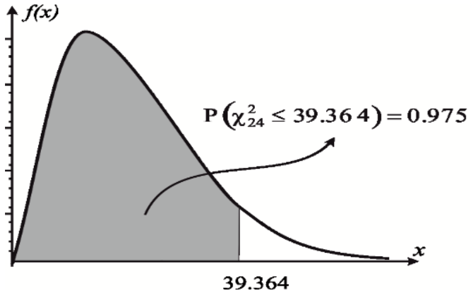
$$[\bar{y}_n - s_y\, t_{n-1}(\alpha/2)/\sqrt{n},\ \bar{y}_n + s_y\, t_{n-1}(\alpha/2)/\sqrt{n}]$$
$$=[74.6-(8.036)(2.064)/5\ ,\ 74.6-(8.036)(2.064)/5]=[71.28\ ,\ 77.92]$$

olarak hesaplanmıştır.

c) σ_a^2 için %95 lik güven aralığı yazalım. $\alpha = 0.05$ için ki-kare dağılım tablosundan, $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2} = \chi^2_{24,0.975} = 39.364$ ve $\chi^2_{n-1,\alpha/2} = \chi^2_{24,0.025} = 12.401$ olarak bulunmuştur. Buna göre, σ_a^2 için %95 lik güven aralığı,

$$\left[\frac{(n-1)\,s_n^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}\ ,\ \frac{(n-1)\,s_n^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}\right]=\left[\frac{(24)(85.1933)}{39.364},\frac{(24)(85.1933)}{12.401}\right]=\left[51.93,164.88\right]$$

olarak hesaplanmıştır.



Şekil 9.6.2 Örnek (9.6.3c) de varyans için güven aralığına ait ki-kare değeri

d) Şimdi de, varyansların eşit olduğu varsayımı altında, $\mu_b - \mu_a$ farkı için %95 lik güven aralığı oluşturalım. Önce,

$$F=\frac{\max\{S^2_{n,X}, S^2_{m,Y}\}}{\min\{S^2_{n,X}, S^2_{m,Y}\}}=\frac{\max\{85.1933,\ 64.5833\}}{\min\{85.1933,\ 64.5833\}}=\frac{85.1933}{64.5833}=1.32<1.98=F^{0.05}_{24,24}$$

olup $H_0 : \sigma_a^2 = \sigma_b^2$ hipotezi $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinde red edilemez. Diğer taraftan,

$$s_p^2 = ((n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2)/(n+m-2) = (s_x^2 + s_y^2)/2 = (85.1933 + 64.5833)/2 = 74.8883 \text{ olup,}$$

$$[\bar{y}_n - \bar{x}_n - s_p\sqrt{(1/n)+(1/n)}\ t_{n+n-2}(\alpha/2)\ ,\ \bar{y}_n - \bar{x}_n + s_p\sqrt{(1/n)+(1/n)}\ t_{n+n-2}(\alpha/2)]$$

formülünde $t_{48}(0.025) \cong 2.009$ ile beraber diğer değerler yerine yazıldığında, $\mu_b - \mu_a$ farkı için %95 lik güven aralığı,

$$(\bar{y}_n - \bar{x}_n) \pm \sqrt{2/25}\ s_p\ t_{48}(\alpha/2) \Leftrightarrow (74.6-68.12) \pm \sqrt{2/25}\,(\sqrt{74.8883})(2.009)$$
$$\Leftrightarrow 6.48\ \pm 4.92\ \Leftrightarrow (1.56\ ,\ 11.4)$$

olarak hesaplanmıştır⊕