3. HAFTA

Koşullu Beklenen Değer ve Koşullu Varyans

X ve *Y* rasgele değişkenler olmak üzere; $Y = y$ verildiğinde *X*'in koşullu dağılımı bulunabilir. Yani $(X / Y = y)$, $f_{X/Y}(x/y)$ olasılık fonksiyonuna sahip olsun. Bu koşullu dağılımdan, X rasgele değişkeninin beklenen değeri ve varyansı bulunabilir.

Tanım: *X* ve *Y* kesikli rasgele değişkenler olsun. $Y = y$ verildiğinde *X*'in koşullu beklenen değeri

$$\begin{aligned}\mu_{X/Y=y} &= E(X / Y = y)\\ &= \sum_x x f_{X/Y}(x/y)\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Koşullu beklenen değer bir rasgele değişken gibidir. *X*'in koşulsuz beklenen değeri $E(X)$ bir sabittir. $E(X / Y = y)$ koşullu beklenen değeri, *y*'ye bağlı bir sabittir. Örneğin $E(X / Y = 2)$, $E(X / Y = 3)$'den farklıdır. Bu nedenle, $E(X / Y = y)$ *y*'nin bir fonksiyonu biçiminde algılanacak ve $E(X / Y = y) = h(y)$ biçiminde ifade edilecek. $h(y) = E(X / Y = y)$ fonksiyonunu elde etmek için

i) Seçilen *y* değerinde *Y* sabitlenecek

ii) *Y* bu değerde sabitlendiğinde, *X*'in beklenen değeri elde edilecek.

Ancak, *Y*'nin rasgele bir değerinde de fonksiyon elde edilebilir:

i) *Y*'nin rasgele değerini gözle

ii) Gözlenen rasgele değerde *Y*'yi sabitle

iii) $E(X / Y = \textit{gözlenen rasgele değer})$'i elde et

Buradan $E(X / Y) = h(Y)$ rasgele değişkeni elde edilir. Bu ifadede de rasgelelik *X*'den değil, *Y*'den gelir. Yani $E(X / Y)$ koşullu beklenen değeri rasgele bir değişkendir.

Örnek: *X* ve *Y* rasgele değişkenleri için

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1/8 & , \ y = 1 \\ 7/8 & , \ y = 2 \\ 0 & , \ d.y. \end{cases}$$

ve

$$f_{X/Y}(x/y)=\begin{cases}3/4 & , \ x=2y \\ 1/4 & , \ x=3y \\ 0 & , \ d.y.\end{cases}$$

olsun. $E(X/Y=y)$ değerini elde ederek, $E(X/Y)$'nin dağılımını bulunuz.

Çözüm: $f_Y(y)$' den $f_{X/Y}(x/y)$ koşullu dağılımı

$$f_{X/Y}(x/1)=\begin{cases}3/4 & , \ x=2 \\ 1/4 & , \ x=3 \\ 0 & , \ d.y.\end{cases} \quad \text{ve} \quad f_{X/Y}(x/2)=\begin{cases}3/4 & , \ x=4 \\ 1/4 & , \ x=6 \\ 0 & , \ d.y.\end{cases}$$

olarak elde edilir. Bu koşullu dağılımlardan

$$E(X/Y=1)=\sum_x x\,f_{X/Y}(x/1) = 2\frac{3}{4}+3\frac{1}{4} = \frac{9}{4} \quad \text{ve} \quad E(X/Y=2)=\sum_x x\,f_{X/Y}(x/2) = 4\frac{3}{4}+6\frac{1}{4} = \frac{18}{4}$$

sonuçları elde edilir. Buradan

$$E(X/Y=y)=\begin{cases}9/4 & , \ y=1 \\ 18/4 & , \ y=2\end{cases}$$

dir ve bu sonuçlar y'ye bağlı sayılardır.

Şimdi

$$E(X/Y)=\begin{cases}9/4 & , \ Y=1 \quad (1/8 \ \textit{olasılığı ile}) \\ 18/4 & , \ Y=2 \quad (7/8 \ \textit{olasılığı ile})\end{cases}$$

olarak alalım. Böylece

$$f_{E(X/Y)}(E(X/Y))=\begin{cases}1/8 & , \ E(X/Y)=9/4 \\ 7/8 & , \ E(X/Y)=18/4 \\ 0 & , \ d.y.\end{cases}$$

dir. Buradan da görüldüğü gibi $E(X/Y)$ bir rasgele değişkendir. Burada rasgelelik X'de değil, Y'dedir.

Koşullu varyans da benzer biçimde bulunur.

Tanım: X ve Y rasgele değişkenler olsun. Y verildiğinde X'in koşullu varyansı

$$\begin{aligned} Var(X/Y) &= E(X^2/Y) - [E(X/Y)]^2 \\ &= E[(X-\mu_{X/Y=y})^2/Y] \end{aligned}$$

ile verilir.

Beklene değerde olduğu gibi $Var(X/Y=y)$, y'ye bağlı bir sabittir. Ancak $Var(X/Y)$bir rasgele değişkendir.

Örnek: Bir önceki örnekde verilenleri göz önüne alarak $Var(X/Y=y)$ değerini elde ederek, $Var(X/Y)$'nin dağılımını bulunuz.

Çözüm: $Var(X/Y=y) = E(X^2/Y=y) - [E(X/Y=y)]^2$ dir. X ve Y rasgele değişkenleri için

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1/8 & , \ y=1 \\ 7/8 & , \ y=2 \\ 0 & , \ d.y. \end{cases} \qquad \text{ve} \qquad f_{X/Y}(x/y) = \begin{cases} 3/4 & , \ x=2y \\ 1/4 & , \ x=3y \\ 0 & , \ d.y. \end{cases}$$

olarak verilmiş ve $f_{X/Y}(x/y)$'nin koşullu dağılımı

$$f_{X/Y}(x/1) = \begin{cases} 3/4 & , \ x=2 \\ 1/4 & , \ x=3 \\ 0 & , \ d.y. \end{cases} \qquad \text{ve} \qquad f_{X/Y}(x/2) = \begin{cases} 3/4 & , \ x=4 \\ 1/4 & , \ x=6 \\ 0 & , \ d.y. \end{cases}$$

olarak elde edilmişti. Bu koşullu dağılımlardan

$$\begin{aligned} E(X/Y=1) &= \sum_x x\, f_{X/Y}(x/1) \\ &= 2\frac{3}{4} + 3\frac{1}{4} \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned} \qquad \text{ve} \qquad \begin{aligned} E(X^2/Y=1) &= \sum_x x^2\, f_{X/Y}(x/1) \\ &= 2^2\frac{3}{4} + 3^2\frac{1}{4} \\ &= \frac{21}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(X/Y=1) &= E(X^2/Y=1) - [E(X/Y=1)]^2 \\ &= \frac{21}{4} - \left(\frac{9}{4}\right)^2 \\ &= \frac{3}{16} \end{aligned}$$

ve

$$E(X/Y=2)=\sum_x x\, f_{X/Y}(x/2) \qquad\qquad E(X^2/Y=2)=\sum_x x^2\, f_{X/Y}(x/2)$$

$$=4\frac{3}{4}+6\frac{1}{4} \qquad \text{ve} \qquad =4^2\frac{3}{4}+6^2\frac{1}{4}$$

$$=\frac{18}{4} \qquad\qquad =\frac{84}{4}$$

$$Var(X/Y=2)=E(X^2/Y=2)-[E(X/Y=2)]^2$$
$$=\frac{84}{4}-\left(\frac{18}{4}\right)^2$$
$$=\frac{12}{16}$$

sonuçları elde edilir. Buradan

$$Var(X/Y=y)=\begin{cases}3/16 & ,\ y=1\\ 12/16 & ,\ y=2\end{cases}$$

dir ve bu sonuçlar y'ye bağlı sayılardır.

Şimdi

$$Var(X/Y)=\begin{cases}3/16 & ,\ Y=1 \quad (1/8\ \textit{olasılığı ile})\\ 12/16 & ,\ Y=2 \quad (7/8\ \textit{olasılığı ile})\end{cases}$$

olarak alalım. Böylece

$$f_{Var(X/Y)}(Var(X/Y))=\begin{cases}1/8 & ,\ Var(X/Y)=3/16\\ 7/8 & ,\ Var(X/Y)=12/16\\ 0 & ,\ d.y.\end{cases}$$

dir. Buradan da görüldüğü gibi $Var(X/Y)$ bir rasgele değişkendir. Burada rasgelelik X'de değil, Y'dedir.

Teorem : Koşullu Beklenen Değer ve Varyans için Bazı Sonuçlar

Aşağıdaki bütün beklenen değerler sonlu ise her X ve Y kesikli rasgele değişkenleri için

i) $E(X)=E_Y[E(X/Y)]$

ii) g'nin her fonksiyonu için

$E(g(X))=E_Y[E(g(X)/Y)]$

iii) $Var(X)=E_Y[Var(X/Y)]+Var_Y[E(X/Y)]$

Burada E_Y ve Var_Y, Y üzerinden beklenen değeri ve varyansı göstermektedir.

İspat : i), ii)' nin özel durumu olduğundan, i)' nin ispatı verilmeyecek.

ii) Her hangi bir g fonksiyonu için $E(g(X)) = E_Y[E(g(X)/Y)]$ olduğu gösterilecek. Eşitliğin sağ tarafından işe başlanılır ise

$$
\begin{aligned}
E_Y[E(g(X)/Y)] &= E_Y\left[\sum_x g(x)P(X=x/Y)\right] \\
&= \sum_y \left[\sum_x g(x)P(X=x/Y=y)\right]P(Y=y) \\
&= \sum_y \sum_x g(x)P(X=x/Y=y)P(Y=y) \\
&= \sum_x g(x)\sum_y P(X=x/Y=y)P(Y=y) \\
&= \sum_x g(x)\sum_y P(X=x,Y=y) \\
&= \sum_x g(x)P(X=x) \\
&= E(g(X))
\end{aligned}
$$

olur.

iii) $Var(X) = E_Y[Var(X/Y)] + Var_Y[E(X/Y)]$ olduğunu göstermek için burada da eşitliğin sağ tarafından işe başlanılsın.

$$
\begin{aligned}
E_Y[Var(X/Y)] + Var_Y[E(X/Y)] &= E_Y\left[E(X^2/Y) - (E(X/Y))^2\right] + E_Y\left[(E(X/Y))^2\right] - \left[E_Y(E(X/Y))\right]^2 \\
&= E_Y\left[E(X^2/Y) - (E(X/Y))^2\right] + E_Y\left[(E(X/Y))^2\right] - \left[E(X)\right]^2 \\
&= E_Y\left[E(X^2/Y)\right] - E_Y\left[(E(X/Y))^2\right] + E_Y\left[(E(X/Y))^2\right] - \left[E(X)\right]^2 \\
&= E_Y\left[E(X^2/Y)\right] - \left[E(X)\right]^2 \\
&= E(X^2) - \left[E(X)\right]^2 \\
&= Var(X)
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir.

Soru: X_1, X_2, X_3 rasgele değişkenleri için

$$Cov(X_1, X_2) = E[Cov(X_1, X_2 / X_3)] + Cov[E(X_1 / X_3), E(X_2 / X_3)]$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek: X ve Y iki rasgele değişken ve

$$f_Y(y) = pq^{y-1}, y = 1, 2, \ldots \quad (0<p<1 \text{ , } q=1-p)$$

ve

$$f_{X/Y}(x/Y) = \frac{e^{-\lambda Y}(\lambda Y)^x}{x!} \quad , \quad x = 0,1,\ldots$$

olsun. X rasgele değişkeninin beklenen değerini ve varyansını bulunuz.

Çözüm: Burada $Y \sim Geomitrik(p)$ ve $(X/Y) \sim Poisson(\lambda Y)$ dir.

Not: Bir deneyin bağımsız Bernoulli denemelerinden oluştuğu kabul edilsin. İlk başarı elde edilinceye kadar bağımsız denemeler yapılmaya devam edildiğinde, ilk başarının elde edilmesi için gerçekleşen deneme sayası geometrik rasgele değişkendir. Burada p başarı olasılığını ve $1-p$ başarısızlık olasılığını göstermektedir.

Geometrik dağılıma sahip bir rasgele değişkenin beklenen değeri $E(Y) = \frac{1}{p}$ ve $Var(Y) = \frac{1-p}{p^2}$ dir. Ayrıca Poisson dağılımının beklenen değeri varyansı eşit olduğundan $E(X/Y) = Var(X/Y) = \lambda Y$ dir.

Böylece

$$\begin{aligned} E(X) &= E_Y[E(X/Y)] \\ &= E_Y(\lambda Y) \\ &= \lambda E_Y(Y) \\ &= \frac{\lambda}{p} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} Var(X) &= E_Y[Var(X/Y)] + Var_Y[E(X/Y)] \\ &= E_Y(\lambda Y) + Var_Y(\lambda Y) \\ &= \lambda E_Y(Y) + \lambda^2 Var_Y(Y) \\ &= \lambda \frac{1}{p} + \lambda^2 \frac{1-p}{p^2} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Örnek: *X* rasgele değişkeni yaprağa bırakılan böcek yumurta sayısını ve *Y* rasgele değişkeni hayatta kalan yumurtaların sayısını göstersin.

$$X \sim Poisson(\lambda)\,,\; E(X) = Var(X) = \lambda$$

$$(Y/X) \sim Binom(X, p)\,,\; E(Y/X) = Xp\,,\; Var(Y/X) = Xp(1-p)\,,\; 0 < p < 1$$

olmak üzere *Y* rasgele değişkeninin beklenen değerini ve varyansını bularak, *X* ve *Y* rasgele değişkenleri arasındaki kovaryans ve korelasyonları elde ediniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} E(Y) &= E_X[E(Y/X)] \\ &= E_X(Xp) \\ &= pE_X(X) \\ &= p\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(Y) &= E_X[Var(Y/X)] + Var_X[E(Y/X)] \\ &= E_X(Xp(1-p)) + Var_X(Xp) \\ &= p(1-p)E_X(X) + p^2 Var_X(X) \\ &= p(1-p)\lambda + p^2\lambda \\ &= p\lambda - p^2\lambda + p^2\lambda \\ &= p\lambda \end{aligned}$$

Buradan, $Y \sim Poisson(p\lambda)$ dır.

Koşullu beklenen değerden kovaryan ve korelasyon hesaplanabilir:

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

dir ve yukarıdaki sonuçlardan, *X*' koşul olduğunda, *X* ve *Y* rasgele değişkenlerinin çarpımlarının beklenen değeri

$$\begin{aligned} E(XY) &= E_X[E(XY/X)] \\ &= E_X[X\; E(Y/X)] \\ &= E_X(XXp) \\ &= pE(X^2) \\ &= p(Var(X) + E(X)^2) \\ &= p(\lambda + \lambda^2) \end{aligned}$$

dir ve

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= p(\lambda + \lambda^2) - (\lambda)(p\lambda) \\ &= p\lambda \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buradan korelasyon katsayısı

$$\begin{aligned} Corr(X,Y) &= \rho_{X,Y} \\ &= \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} \\ &= \frac{p\lambda}{\sqrt{\lambda}\sqrt{p\lambda}} \\ &= \sqrt{p} \end{aligned}$$

elde edilir.

Bazı Kesikli Çok Değişkenli Dağılımlar

Bu kısımda Multinomial (Çok terimli) ve çok değişkenli Hipergeometrik dağılım kısaca tanıtılmaya çalışılacak.

Multinomial (Çok Terimli) Dağılım

Öncelikle Binom dağılımı kısaca hatırlayalım:

- n tane bağımsız deneme sayısı
- Her denemede olası iki sonuç
- $P(Başarı) = p$ (p sabit)
- X rasgele değişkeni n denemedeki başarıların sayısı

olmak üzere

$$X \sim Binom(n, p)$$

ve

$$f_X(x) = P(X = x)$$
$$= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad , \quad x = 0,1,...,n$$

dir. Şimdi aşağıdaki durumu düşünelim:

- n tane bağımsız deneme sayısı
- Her denemede olası k sonuç
- $P(i\ inci\ sonuç) = p_i$ (p_i sabit), $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$
- $\underline{X}' = (X_1, X_2, ..., X_k)$ rasgele vektör ve X_i i inci sonuçtaki başarıların sayısı

olmak üzere $\underline{X}' = (X_1, X_2, ..., X_k)$ rasgele vektörü, n tane bağımsız deneme ve $p_1, p_2, ..., p_k$ parametreleri ile çok terimli dağılıma sahiptir ve

$$\underline{X} \sim Multinomial(n; p_1, p_2, ..., p_k)$$

biçiminde gösterilir. Buradan $\underline{X}' = (X_1, X_2, ..., X_k)$ rasgele vektörünün olasılık fonksiyonu

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = P(\underline{X} = \underline{x})$$
$$= P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_k = x_k)$$
$$= \frac{n!}{x_1! x_2! ... x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} ... p_k^{x_k} \quad , \quad x_i = 0,1,...,n, \quad \sum_{i=1}^{k} x_i = n, \quad p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$$

dir. Buradan;

1. $\sum_{x_1} \sum_{x_2} ... \sum_{x_k} f_{X_1, X_2, ..., X_k}(x_1, x_2, ..., x_k) = (p_1 + p_2 + ... + p_k)^n = 1^n = 1$
2. $X_i \sim Binom(n, p_i)$, $i = 1,2,...,k$
3. $i \neq j$ için $(X_i + X_j) \sim Binom(n, p_i + p_j)$, $i, j = 1,2,...,k$
4. $X_i \sim Binom(n, p_i)$, $i = 1,2,...,k$ olduğundan $E(X_i) = np_i$ ve $Var(X_i) = np_i(1-p_i)$
5. $Cov(X_i, X_j) = -np_i p_j$
6. $Corr(X_i, X_j) = -\sqrt{\dfrac{p_i p_j}{(1-p_i)(1-p_j)}}$

dir.

Örnek : İki farklı bölgede yaşayan insanların kan gruplarına göre dağılımı aşağıdaki gibidir:

	Kan Grupları					
		A	*B*	*AB*	0	Toplam
Bölgeler	*X*	0.51	0.04	0.02	0.43	1
	Y	0.40	0.10	0.03	0.47	1

Her bir kitleden 30'ar birimlik örneklemler alındığında; her kitle için bu kişilerin 10 tanesinin *A*, 4 tanesinin *B*, 1 tanesinin *AB* ve 15 tanesinin 0 grubu kana sahip olma olasılıklarını bulunuz.

Çözüm: $\underline{X} \sim Multinomial(30; 0.51, 0.04, 0.02, 0.43)$

$$\underline{Y} \sim Multinomial(30; 0.40, 0.10, 0.03, 0.47)$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned} f_{\underline{X}}(\underline{x}) &= P(X_1 = 10, X_2 = 4, X_3 = 1 = X_4 = 15) \\ &= \frac{30!}{10!\ 4!\ 1!\ 15!}(0.51)^{10}(0.04)^4(0.02)^1(0.43)^{15} \\ &= 0.00045 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f_{\underline{Y}}(\underline{y}) &= P(Y_1 = 10, Y_2 = 4, Y_3 = 1 = Y_4 = 15) \\ &= \frac{30!}{10!\ 4!\ 1!\ 15!}(0.40)^{10}(0.10)^4(0.03)^1(0.47)^{15} \\ &= 0.0088 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Çok Değişkenli Hipergeometrik Dağılım

Öncelikle tek değişkenli Hipergometrikdağılımı kısaca hatırlayalım:

- Bir kavanozda *N* tane top olsun
- Toplar 2 renkte ve *M* top siyah, *N-M* top beyaz renkli
- Kavanozdan iadesiz olarak *n* top çekilsin
- *X* rasgele değişkeni *n* denemedeki siyah topların sayısı

olmak üzere

$$X \sim Hipergeometrik(N, M, n)$$

olarak gösterilir ve olasılık fonksiyonu

$$f_X(x) = P(X = x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad , \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

dir. Şimdi aşağıdaki durumu düşünelim:

- Bir kavanozda *N* tane top olsun
- Toplar *k* tane farklı renkte ve *i* renginde M_i top olsun. Burada $\sum_{i=1}^{k} M_i = N$ dir.
- Kavanozdan iadesiz olarak *n* top çekilsin
- $\underline{X}' = (X_1, X_2, \ldots, X_k)$ rasgele vektörü, *n* tane bağımsız deneme her bir renkte gelen topların sayısı yani X_i rasgele değişkeni *n* denemede *i* renginde olan top sayısını göstermekt üzere

$$\underline{X} \sim Multi.Hipergemetrik(N; M_1, M_2, \ldots, M_k; n)$$

biçiminde gösterilir. Buradan $\underline{X}' = (X_1, X_2, \ldots, X_k)$ rasgele vektörünün olasılık fonksiyonu

$$\begin{aligned} f_{\underline{X}}(\underline{x}) &= P(\underline{X} = \underline{x}) \\ &= P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k) \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{k}\binom{M_i}{x_i}}{\binom{N}{n}} \quad , \quad x_i = 0, 1, \ldots, M_i, \quad \sum_{i=1}^{k} x_i = n, \quad \sum_{i=1}^{k} M_i = N \end{aligned}$$

biçiminde verilir. Burada

$$X_i \sim Hipergeometrik(N, M_i, n) \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

dir.