6. HAFTA

Matrisler ve Matris İşlemleri

Matris gerçek sayıların herhangi bir dikdörtgensel düzenidir. p satırlı ve n sütunlu düzen

$$A_{pxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{bmatrix}$$

biçiminde gösterilir.

Matris işlemleri:

- A matrisinin transpozu A' ile gösterilir ve A_{pxn} ise A'_{nxp} dir.
- Matrisin bir c sabiti ile çarpılması, matrisin her bir elemanının c sabiti ile çarpılmasıdır. Yani

$$cA_{pxn} = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{p1} & ca_{p2} & \cdots & ca_{pn} \end{bmatrix}$$

- İki matrisin toplanabilmesi için boyutları eşit olmalıdır.
- İki matrisin çarpılması için ilk matrisin sütun sayısı, ikinci matrisin satır sayısına eşit olmalıdır. Yani $A_{pxk}B_{kxn} = (AB)_{pxn}$ dir.
- $A = A'$ ise A simetrik bir matrisdir.
- $B_{kxk}A_{kxk} = A_{kxk}B_{kxk} = I_{kxk}$ ise B, A matrisinin tersi olan matrisdir ve A^{-1} ile gösterilir. Burada I birim matrisdir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ olmak üzere A matrisinin tersini bulunuz.

Çözüm: $A^{-1} = \dfrac{1}{(12-15)}\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5/3 & -4/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.000 & 1.000 \\ 1.6675 & -1.333 \end{bmatrix}$ olarak bulunur.

Sonuç: Boyutları aynı olan A, B, C matrisleri, c ve d sabitleri için aşağıdaki koşullar geçerlidir:

- $(A+B)+C = A+(B+C)$
- $A+B = B+A$

- $C(A+B)=CA+CB$
- $(c+d)A=cA+dA$
- $(A+B)'=A'+B'$
- $(cd)A=c(dA)$
- $(cA)'=cA'$

Tanım: Her hangi bir *A* matrisinin satır ve sütun sayısı eşit ise *A* bir kare matrisdir. Boyutları aynı olan $\underline{x}$ ve $\underline{y}$ vektörleri için $\underline{x}'\underline{y}=\underline{y}'\underline{x}$ dir.

Sonuç: *A*, *B*, *C* boyutları çarpılabilme koşuluna uygun olan matrisler ve her hangi bir *c* sabiti için aşağıdaki koşullar geçerlidir:

- $C(AB)=(CA)B$
- $A(BC)=(AB)C$
- $A(B+C)=AB+AC$
- $(B+C)A=BA+CA$
- $(AB)'=B'A'$
- $AB\neq BA$
- $0_{mxk}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ elemanları sıfır olan bir matris olmak üzere,

  $A_{mxn}B_{nxk}=0_{mxk}$ ise *A* veya *B* matrislerinin tüm elemanlarının sıfır olması gerekmez.

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ olmak üzere $AB=0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$A_{2x3}B_{3x1}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}=0_{2x1}$$

dır. *A* veya *B* matrislerinin tüm elemanları sıfır olmadığı halde çarpımları elemanları sıfır olan bir matrisdir.

Tanım: Bir matrisin rankı, lineer bağımsız satır veya lineer bağımsız sütun sayısına eşittir.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$ olmak üzere A matrisinin rankı kaçtır?

Çözüm: A matrisinin 1. sütunu 2 ile çarpıldığında, 2. ve 3. sütunların toplamına eşit olduğundan

$$rank(A) = 2$$

dir. Yani lineer bağımsız sütun sayısı 2 dir.

Tanım: A_{kxk} ve $\underline{x}_{kx1}$ olmak üzere eğer $A_{kxk}\ \underline{x}_{kx1} = \underline{0}_{kx1}$, $\underline{x}_{kx1} = \underline{0}_{kx1}$ da sağlanıyor ise A_{kxk} kare matrisi tekil olmayan (nonsinguler) bir matrisdir. Bir kare matrisin rankı satır veya sütun sayısına eşit ise, matris nonsingulerdir (tersi alınabilen) denir.

Sonuç: A_{kxk} tersi alınabilen bir kare matris ise $AB = BA = I$ eşitliğini sağlayan sadece bir B_{kxk} matrisi vardır.

Tanım: $AB = BA = I$ eşitliğini sağlayan B matrisine, A matrisinin ters matrisi denir ve $B = A^{-1}$ dır.

Sonuç: A_{kxk} ve B_{kxk} boyutlar eşit kare matrisler ve tersleri alınabiliyor ise aşağıdaki koşullar geçerlidir:

- $(A^{-1})' = (A')^{-1}$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $|A| = |A'|$
- A matrisinin bir satırının (veya sütununun) tüm elemanları "0" ise $|A| = 0$ dır.
- $|A| = \dfrac{1}{|A^{-1}|}$ ve $|A||A^{-1}| = 1$ dır.
- $|AB| = |A||B|$
- $|cA| = c^k\,|A|$ burada c herhangi bir sabittir.

Tanım: $A=\left\{a_{ij}\right\}$, kxk tipinde kare bir matris olsun. A matrisinin $trace(\dot{I}z)$'i diagonal elemanlarının toplamına eşittir yani

$$tr(A)=\sum_{i=1}^{k} a_{ii}$$

dır.

Sonuç: A ve B kxk tipinde matrisler ve c bir sabit olmak üzere aşağıdaki koşullar geçerlidir:

- $tr(cA)=c\ tr(A)$
- $tr(A\pm B)=tr(A)\pm tr(B)$
- $tr(AB)=tr(BA)$
- $tr(AA')=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} a_{ij}^2$

Tanım: A kare matrisin satır vektörleri (veya sütun vektörleri) ikişerli birbirine dik ve uzunlukları "1" ise A matrisine ortogonal matris denir. A ortogonal bir matris ise $AA'=I$ (veya $A'A=I$)dır.

Sonuç: A matrisinin ortogonal bir matris olması için gerek ve yeter şart $A^{-1}=A'$ olmasıdır.

Örnek:

$$A=\begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \text{olsun.}$$

A matrisinin ortogonal bir matris olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$AA' = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dır. Yani $A' = A^{-1}$ olduğundan A ortogonal bir matrisdir. Burda, $A = A'$, $AA' = A'A = AA = I$ dır.

Tanım: A, kxk tipinde bir matris ve I, kxk tipinde birim matris olmak üzere; $|A - \lambda I| = 0$ polinom denklemini sağlayan $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ sabitlerin, A matrisinin özdeğerleri (karekteristik kökleri) denir.

Tanım: A, kxk tipinde bir matris ve λ, A'nın bir özdeğeri olsun. $A\underline{x} = \lambda \underline{x}$ eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı bir vektör $(\underline{x}_{kx1} \neq \underline{0})$ ise, $\underline{x}$ vektörüne λ özdeğerine ilişkin A matrisinin özvektörü denir.

Örnek:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ olmak üzere A matrisinin özdeğerlerini ve ilişkili özvektörlerini elde ediniz.

Çözüm:

$$|A - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} \right|$$

$$= (1-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_2 = 2$ olarak elde edilir.

Bu özdeğerler ilişkin özvektörler:

$\lambda_1 = 1$ için

$$A\underline{\mathrm{x}} = \lambda\underline{\mathrm{x}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 \\ x_1 + 3x_2 &= x_2 \end{aligned}$$

olur ve buradan, $x_1 = -2x_2$ dir. x_1 ve x_2 bir çok değeri alabilir. $x_2 = 1$ değeri için $x_1 = -2$ olur ve ilişkili özvektör

$$\underline{\mathrm{x}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $\lambda_2 = 3$ için

$$A\underline{\mathrm{x}} = \lambda\underline{\mathrm{x}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 3x_1 \\ x_1 + 3x_2 &= 3x_2 \end{aligned}$$

olur ve buradan, $x_2 = 1$ değeri için $x_1 = 0$ olur ve ilişkili özvektör

$$\underline{\mathrm{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Genellikle, özvektörler uzunluğu 1 olacak şekilde belirlenirler. Bu nedenle elde edilen özvektörler birimleştirilirler (normlaştırılırlar). Yani

$$\underline{e} = \frac{\underline{\mathrm{x}}}{\sqrt{\underline{\mathrm{x}}'\underline{\mathrm{x}}}} \quad \text{ve} \quad \underline{e}'\underline{e} = 1$$

olur.

$\lambda_1 = 1$ için $\underline{e}_1' = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ ve $\lambda_2 = 3$ için $\underline{e}_2' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ olarak bulunur.

A, kxk tipinde simetrik kare bir matris olduğunda, A'nın k tane özdeğer ve birim özvektör çiftleri

$(\lambda_1, \underline{e}_1), (\lambda_2, \underline{e}_2), \cdots, (\lambda_k, \underline{e}_k)$ dir. Burada

$$\underline{e}_i' \underline{e}_l = \begin{cases} 1 \ , & i = l \\ 0 \ , & i \neq l \end{cases}$$

dir.

Örnek:

$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere A matrisinin özdeğerlerini ve ilişkili birim özvektörlerini elde ediniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \left| \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{bmatrix} 1-\lambda & -5 \\ -5 & 1-\lambda \end{bmatrix} \right| \\ &= (1-\lambda)(1-\lambda) - 25 = 0 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda - 24 = 0 \end{aligned}$$

dır. Buradan $\lambda_1 = 6$ ve $\lambda_2 = -4$ olarak elde edilir. Bu özdeğerler ilişkin özvektörler:

$\lambda_1 = 6$ için

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 &= 6x_1 \\ -5x_1 + x_2 &= 6x_2 \end{aligned}$$

olur ve buradan ilişkili özvektör

$$\underline{\mathrm{x}}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Bu özvektöre ilişkin birim özvektör

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Benzer şekilde $\lambda_2 = -4$ için

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (-4) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 &= -4x_1 \\ -5x_1 + x_2 &= -4x_2 \end{aligned}$$

olur ve buradan ilişkili özvektör

$$\underline{\mathrm{x}}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Bu özvektöre ilişkin birim özvektör

$$\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Burada $\underline{e}_1'\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = 1$, $\underline{e}_2'\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = 1$

ve $\underline{e}_1'\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = 0$

dir.

Tanım: A, kxk tipinde simetrik kare bir matris ve $\underline{x}$ $kx1$ tipinde bir vektör olmak üzere

$$\begin{aligned} Q(\underline{x}) &= \underline{x}'A\underline{x} \\ &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_i x_j \end{aligned}$$

ifadesi karasel form olarak tanımlanır. Burada $\underline{x}'A\underline{x}$, x_i^2 karesel terimlerinden ve $x_i x_j$ çarpım terimlerinden oluştuğundan, $\underline{x}'A\underline{x}$ ifadesine karesel form adı verilmektedir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi için karesel formu elde ediniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} Q(\underline{x}) &= \underline{x}'A\underline{x} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \end{aligned}$$

dır.

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ matrisi için karesel formu elde ediniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} Q(\underline{x}) &= \underline{x}'A\underline{x} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3 - x_3^2 \end{aligned}$$

dır.

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5/2 & 1/2 \\ 2 & -2 & 0 & -1/2 \\ -5/2 & 0 & -1 & 2 \\ 1/2 & -1/2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi için karesel formu elde ediniz.

Çözüm:

$Q(\underline{x}) = \underline{x}' A \underline{x}$

$$= 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 - 5x_1x_3 - x_3^2 + x_1x_4 - x_2x_4 + 4x_3x_4 + x_4^2$$

karesel formunun matrisini bulunuz.

Pozitif Tanımlı Matris

Çok değişkenli analizlerde karesel formlar çok kullanılmaktadır. Karesel formların her zaman pozitif olduğu ve pozitif tanımlı matrislerle ilişkili olduğu düşünülecek. Karesel formlar ve simetrik matrislerden elde edilen sonuçlar, spektral ayrışım olarak bilinen simetrik matrisler için genişletilmiş direkt sonuçlardır. *kxk* tipinde simetrik *A* matrisi için spektral ayrışım

$$A = \lambda_1 \underline{e}_1 \underline{e}_1' + \lambda_2 \underline{e}_2 \underline{e}_2' + \cdots + \lambda_k \underline{e}_k \underline{e}_k'$$

biçimindedir, burada $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ *A* matrisinin özdeğerleri ve $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \cdots, \underline{e}_k$ ‘ler bu özdeğerlere karşılık gelen birimleştirilmiş (normlaştırılmış) özvektörlerdir.

Örnek:

$A = \begin{bmatrix} 3 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin spektral ayrışımını elde ediniz.

Çözüm: *A* matrisinin özdeğerleri ve ilişkili birim özvektörleri

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \left| \begin{bmatrix} 3 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{bmatrix} 3-\lambda & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2-\lambda \end{bmatrix} \right| \\ &= (3-\lambda)(2-\lambda) - 2 = 0 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \end{aligned}$$

dır. Buradan $\lambda_1 = 4$ ve $\lambda_2 = 1$ olarak elde edilir. Bu özdeğerlere ilişkin özvektörler:

$\lambda_1 = 4$ için

$$\begin{bmatrix} 3 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 - \sqrt{2}x_2 &= 4x_1 \\ -\sqrt{2}x_1 + 2x_2 &= 4x_2 \end{aligned}$$

olur ve buradan ilişkili özvektör

$$\underline{\mathrm{x}}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Bu özvektöre ilişkin birim özvektör

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

dir. Benzer şekilde $\lambda_2 = 1$ için

$$\begin{bmatrix} 3 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 - \sqrt{2}x_2 &= x_1 \\ -\sqrt{2}x_1 + 2x_2 &= x_2 \end{aligned}$$

olur ve buradan ilişkili özvektör

$$\underline{\mathrm{x}}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Bu özvektöre ilişkin birim özvektör

$$\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Burada

$$\underline{e}_1'\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = 1,\ \underline{e}_2'\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = 1,\ \underline{e}_1'\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = 0$$

dir. Böylece

$$A = \lambda_1 \underline{e}_1 \underline{e}_1' + \lambda_2 \underline{e}_2 \underline{e}_2'$$

$$\begin{aligned}
A = \begin{bmatrix} 3 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix} &= 4 \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \\
&= 4 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{4\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{4\sqrt{2}}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilmiş olur.

Bütün $\underline{x}' = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k \end{bmatrix}$'ler için $\underline{x}'A\underline{x} \geq 0$ özelliğini sağlayan *kxk* tipindeki simetrik *A* matrisine negatif tanımlı olmayan matris denir. Eğer $\underline{x}'A\underline{x}=0$ eşitliği sadece $\underline{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ vektörü için geçerli ise *A* matrisine pozitif tanımlı matris denir. Diğer bir ifade ile $\underline{x}' \neq \underline{0}$ tüm vektörler için $\underline{x}'A\underline{x} > 0$ ise, *A* pozitif tanımlı bir matrisdir.

Örnek: $Q(\underline{x}) = 3x_1^2 - (2\sqrt{2})x_1x_2 + 2x_2^2$ karesel formuna ilişkin matrisin pozitif tanımlı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Bu karesel formun matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$$

dir ve bu matrisin öz değerleri $|A - \lambda I| = 0$ denkleminin çözümünden daha önce $\lambda_1 = 4$ ve $\lambda_2 = 1$ olarak elde edilmişti. Spektral ayrışımdan

$$\begin{aligned} A_{2x2} &= \lambda_1 \underline{e}_1 \underline{e}_1' + \lambda_2 \underline{e}_2 \underline{e}_2' \\ &= 4\underline{e}_1 \underline{e}_1' + \underline{e}_2 \underline{e}_2' \end{aligned}$$

dır. A matrisi soldan $\underline{x}'$ ve sağdan $\underline{x}$ ile çarpıldığında (burada $\underline{x}' = [x_1 \quad x_2] \neq \underline{0}$ olan herhangi bir vektör)

$$\begin{aligned} \underline{x}_{1x2}' A_{2x2} \underline{x}_{2x1} &= 4\underline{x}_{1x2}' \underline{e}_1 \underline{e}_1' \underline{x}_{2x1} + \underline{x}_{1x2}' \underline{e}_2 \underline{e}_2' \underline{x}_{2x1} \\ &= (4\underline{y}_1^2 + \underline{y}_2^2) \geq 0 \end{aligned}$$

dır, burada $\underline{y}_1^2 = \underline{x}' \underline{e}_1 \underline{e}_1' \underline{x}$ ve $\underline{y}_2^2 = \underline{x}' \underline{e}_2 \underline{e}_2' \underline{x}$ dir. Ayrıca $\underline{e}_1$ ve $\underline{e}_2$ birim özvektörlerinin boyutu $2x1$ dir. y_1 ve y_2 nin her ikisinin de sıfır olmadığı gösterilir ise $\underline{x}' A \underline{x} = (4y_1^2 + y_2^2) > 0$ elde edilmiş olur ve bu durumda A pozitif tanımlı bir matrisdir. y_1 ve y_2 nin tanımından

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underline{e}_1' \\ \underline{e}_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \underline{y}_{2x1} &= E_{2x2} \underline{x}_{2x1} \end{aligned}$$

dir. E, tersi E' olan ortogonal bir matrisdir. Yani $E' = E^{-1}$ ve $E'E = I$ dir. Buradan en son elde edilen eşitlik soldan E' ile çarpıldığında

$$\underline{x} = E' \underline{y}$$

elde edilir. $\underline{x}$ sıfırdan farklı bir vektördür ve $\underline{0} \neq \underline{x} = E' \underline{y} \Rightarrow \underline{y} \neq \underline{0}$ dir.

Spektral ayrışımdan *kxk* tipindeki bir *A* simetrik matrisin pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter şart *A*'nın bütün özdeğerlerinin pozitif olmasıdır. *A*'nın negatif tanımlı olmayan bir matris olması için gerek ve yeter şart *A*'nın özdeğerlerinin sıfırdan büyük veya eşit olmasıdır.

Bir Matrisin Karekökü

Spektral ayrışım yardımıyla simetrik pozitif tanımlı bir matrisin herhangi bir kuvveti bulunabilir. Buradan da bir matrisin kare kökü elde edilir.

A, spektral ayrışımı $A=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i \underline{e}_i \underline{e}_i'$ olan *kx*k tipinde simetrik pozitif tanımlı bir matris ve $P_{kxk}=\begin{bmatrix}\underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \cdots & \underline{e}_\text{k}\end{bmatrix}$, sütunları A matrisinin birimleştirilmiş özvektörleri olan başka bir matris olsun. Buradan,

$$\begin{aligned}A &= \sum_{i=1}^{k}\lambda_i \underline{e}_i \underline{e}_i' \\ &= P_{kxk}\Lambda_{kxk}P_{kxk}'\end{aligned}$$

dır, burada *P*, $PP'=P'P=I$ olan ortogonal bir matris ve $\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k\end{bmatrix}$, $\lambda_i>0$ olan diagonal bir matrisdir. Böylece

$$(P\Lambda^{-1}P')P\Lambda P' = P\Lambda P'(P\Lambda^{-1}P') = PP' = I$$

olduğundan

$$A^{-1}=P\Lambda^{-1}P'=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\lambda_i}\underline{e}_i\underline{e}_i'$$

dır. $\Lambda^{1/2}$, *i*. diagonal elemanları $\sqrt{\lambda_i}$, $i=1,2,\cdots,k$ olan diagonal bir matris olsun.

Buradan

$$\begin{aligned}A^{1/2} &= \sum_{i=1}^{k}\sqrt{\lambda_i}\;\underline{e}_i\underline{e}_i' \\ &= P\Lambda^{1/2}P'\end{aligned}$$

matrisine A matrisinin karekök matrisi denir. $A^{1/2}$ karekök matrisi aşağıdaki özelliklere sahipdir:

- $(A^{1/2})' = A^{1/2}$ ($A^{1/2}$ simetriktir)
- $A^{1/2}A^{1/2} = A$
- $$(A^{1/2})^{-1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \underline{e}_i \underline{e}_i' \\ = P\Lambda^{-1/2}P'$$
- $A^{1/2}A^{-1/2} = A^{-1/2}A^{1/2} = I$ ve $A^{-1/2}A^{-1/2} = A^{-1}$

dır.