8. HAFTA

Rasgele Değişkenlerin Lineer Bileşimlerinin Örneklem Değerleri

$\underline{c}$ elamanları sabitler olan px1 tipinde bir vektör ve $\underline{X}' = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_p \end{pmatrix}$ rasgele bir vektör olmak üzere, bir çok çok değişkenli yöntemde lineer bileşim olarak

$$\underline{c}'\underline{X} = c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_pX_p$$

formu gözönüne alınır. Bu lineer formun j inci gözlem değeri

$$\underline{c}'\underline{\mathrm{x}}_j = c_1x_{1j} + c_2x_{2j} + \cdots + c_px_{pj} \quad , \quad j = 1,2,...,n$$

dir. Buradan $\underline{c}'\underline{\mathrm{x}}_j$ lineer bileşimin örneklem ortalaması:

$$\begin{aligned}\frac{(\underline{c}'\underline{\mathrm{x}}_1 + \underline{c}'\underline{\mathrm{x}}_2 + \cdots + \underline{c}'\underline{\mathrm{x}}_n)}{n} &= \underline{c}'(\frac{\underline{\mathrm{x}}_1 + \underline{\mathrm{x}}_2 + \cdots + \underline{\mathrm{x}}_n}{n}) \\ &= \underline{c}'\overline{\underline{\mathrm{x}}}\end{aligned}$$

ve örneklem varyansı:

$$\begin{aligned}&\frac{(\underline{c}'\underline{\mathrm{x}}_1 - \underline{c}'\overline{\underline{\mathrm{x}}})^2 + (\underline{c}'\underline{\mathrm{x}}_2 - \underline{c}'\overline{\underline{\mathrm{x}}})^2 + \cdots + (\underline{c}'\underline{\mathrm{x}}_n - \underline{c}'\overline{\underline{\mathrm{x}}})^2}{n-1} \\ &\qquad = \frac{\underline{c}'(\underline{\mathrm{x}}_1 - \overline{\underline{\mathrm{x}}})(\underline{\mathrm{x}}_1 - \overline{\underline{\mathrm{x}}})'\underline{c} + \underline{c}'(\underline{\mathrm{x}}_2 - \overline{\underline{\mathrm{x}}})(\underline{\mathrm{x}}_2 - \overline{\underline{\mathrm{x}}})'\underline{c} + \cdots + \underline{c}'(\underline{\mathrm{x}}_n - \overline{\underline{\mathrm{x}}})(\underline{\mathrm{x}}_n - \overline{\underline{\mathrm{x}}})'\underline{c}}{n-1} \\ &\qquad = \underline{c}'\left[\frac{(\underline{\mathrm{x}}_1 - \overline{\underline{\mathrm{x}}})(\underline{\mathrm{x}}_1 - \overline{\underline{\mathrm{x}}})' + (\underline{\mathrm{x}}_2 - \overline{\underline{\mathrm{x}}})(\underline{\mathrm{x}}_2 - \overline{\underline{\mathrm{x}}})' + \cdots + (\underline{\mathrm{x}}_n - \overline{\underline{\mathrm{x}}})(\underline{\mathrm{x}}_n - \overline{\underline{\mathrm{x}}})'}{n-1}\right]\underline{c} \\ &\qquad = \underline{c}'S\underline{c}\end{aligned}$$

dır.

İkinci bir lineer bileşim

$$\underline{b}'\underline{X} = b_1X_1 + b_2X_2 + \cdots + b_pX_p$$

olmak üzere lineer bileşimin j inci gözlem değeri

$$\underline{b}'\underline{\mathrm{x}}_j = b_1x_{1j} + b_2x_{2j} + \cdots + b_px_{pj} \quad , \quad j = 1,2,...,n$$

dir ve $\underline{b}'\underline{\mathrm{x}}_j$ lineer bileşimin örneklem ortalaması:

$$\frac{(\underline{b}'\underline{x}_1+\underline{b}'\underline{x}_2+\cdots+\underline{b}'\underline{x}_n)}{n}=\underline{b}'(\frac{\underline{x}_1+\underline{x}_2+\cdots+\underline{x}_n}{n})$$
$$=\underline{b}'\overline{\underline{x}}$$

ve örneklem varyansı:

$$\frac{(\underline{b}'\underline{x}_1-\underline{b}'\overline{\underline{x}})^2+(\underline{b}'\underline{x}_2-\underline{b}'\overline{\underline{x}})^2+\cdots+(\underline{b}'\underline{x}_n-\underline{b}'\overline{\underline{x}})^2}{n-1}$$
$$=\frac{\underline{b}'(\underline{x}_1-\overline{\underline{x}})(\underline{x}_1-\overline{\underline{x}})'\underline{b}+\underline{b}'(\underline{x}_2-\overline{\underline{x}})(\underline{x}_2-\overline{\underline{x}})'\underline{b}+\cdots+\underline{b}'(\underline{x}_n-\overline{\underline{x}})(\underline{x}_n-\overline{\underline{x}})'\underline{b}}{n-1}$$
$$=\underline{b}'\left[\frac{(\underline{x}_1-\overline{\underline{x}})(\underline{x}_1-\overline{\underline{x}})'+(\underline{x}_2-\overline{\underline{x}})(\underline{x}_2-\overline{\underline{x}})'+\cdots+(\underline{x}_n-\overline{\underline{x}})(\underline{x}_n-\overline{\underline{x}})'}{n-1}\right]\underline{b}$$
$$=\underline{b}'S\underline{b}$$

dır. Bununla birlikte $\underline{b}'\underline{x}_j$ ve $\underline{c}'\underline{x}_j$ lineer bileşimleri arasındaki örneklem kovaryansı:

$$\frac{(\underline{b}'\underline{x}_1-\underline{b}'\overline{\underline{x}})(\underline{c}'\underline{x}_1-\underline{c}'\overline{\underline{x}})+(\underline{b}'\underline{x}_2-\underline{b}'\overline{\underline{x}})(\underline{c}'\underline{x}_2-\underline{c}'\overline{\underline{x}})+\cdots+(\underline{b}'\underline{x}_n-\underline{b}'\overline{\underline{x}})(\underline{c}'\underline{x}_n-\underline{c}'\overline{\underline{x}})}{n-1}$$
$$=\frac{\underline{b}'(\underline{x}_1-\overline{\underline{x}})(\underline{x}_1-\overline{\underline{x}})'\underline{c}+\underline{b}'(\underline{x}_2-\overline{\underline{x}})(\underline{x}_2-\overline{\underline{x}})'\underline{c}+\cdots+\underline{b}'(\underline{x}_n-\overline{\underline{x}})(\underline{x}_n-\overline{\underline{x}})'\underline{c}}{n-1}$$
$$=\underline{b}'\left[\frac{(\underline{x}_1-\overline{\underline{x}})(\underline{x}_1-\overline{\underline{x}})'+(\underline{x}_2-\overline{\underline{x}})(\underline{x}_2-\overline{\underline{x}})'+\cdots+(\underline{x}_n-\overline{\underline{x}})(\underline{x}_n-\overline{\underline{x}})'}{n-1}\right]\underline{c}$$
$$=\underline{b}'S\underline{c}$$

dir.

Örnek: X veri matrisi ve elemanları sabitler olan $\underline{b}$ ve $\underline{c}$ vektörleri

$$X=\begin{bmatrix}2&4&4&6\\6&1&5&0\\3&2&7&8\end{bmatrix},\quad \underline{b}=\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix},\quad \underline{c}=\begin{bmatrix}3\\4\\-2\end{bmatrix}$$

olarak verilsin. Burada $n=4$ ve $p=3$ dir. $\underline{b}'\underline{X}=b_1X_1+b_2X_2+b_3X_3$ ve $\underline{c}'\underline{X}=c_1X_1+c_2X_2+c_3X_3$ lineer bileşimlerinin örneklem ortalamalarını, örneklem varyanslarını ve iki lineer bileşim arasındaki örneklem kovaryans değerlerini;

a. Lineer bileşimlerin değerlerini elde ederek,

b. X veri matrisinden elde edilen örneklem ortalama vektörünü ve örneklem varyans-kovaryans matrisinden yararlanarak

bulunuz.

Çözüm:

a. $\underline{b}'\underline{\mathrm{x}}_j$, $j=1,2,3,4$, lineer bileşiminin örneklem değerleri

$$\underline{b}'\underline{\mathrm{x}}_1=\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11}\\ x_{21}\\ x_{31}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 6\\ 3\end{bmatrix}$$

$$=(2)(2)+(-3)(6)+(1)(3)$$
$$=-11$$

$$\underline{b}'\underline{\mathrm{x}}_2=\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$$

$$=(2)(4)+(-3)(1)+(1)(2)$$
$$=7$$

$$\underline{b}'\underline{\mathrm{x}}_3=\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 5\\ 7\end{bmatrix}$$

$$=(2)(4)+(-3)(5)+(1)(7)$$
$$=0$$

$$\underline{b}'\underline{\mathrm{x}}_4=\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\ 0\\ 8\end{bmatrix}$$

$$=(2)(6)+(-3)(0)+(1)(8)$$
$$=20$$

olarak bulunur. Buradan

$\underline{b}'\underline{X}$ ' örneklem ortalaması $=\dfrac{-11+7+0+20}{4}=\dfrac{16}{4}=4$

$\underline{b}'\underline{X}$ ' örneklem varyan

$$=\frac{(-11-4)^2+(7-4)^2+(0-4)^2+(20-4)^2}{3}=\frac{225+9+16+256}{3}$$

$$=\frac{506}{3}=168.66$$

olarak bulunur.

Aynı şekilde $\underline{c}'\underline{\mathrm{x}}_j$, $j = 1,2,3,4$, lineer bileşiminin örneklem değerleri

$$\underline{c}'\underline{\mathrm{x}}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= (3)(2) + (4)(6) + (-2)(3)$$
$$= 24$$

$$\underline{c}'\underline{\mathrm{x}}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= (3)(4) + (4)(1) + (-2)(2)$$
$$= 12$$

$$\underline{c}'\underline{\mathrm{x}}_3 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$= (3)(4) + (4)(5) + (-2)(7)$$
$$= 18$$

$$\underline{c}'\underline{\mathrm{x}}_4 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$= (3)(6) + (4)(0) + (-2)(8)$$
$$= 2$$

olmak üzere

$\underline{c}'\underline{X}$ ' örneklem ortalaması $= \dfrac{24+12+18+2}{4} = \dfrac{56}{4} = 14$

$\underline{c}'\underline{X}$ ' örneklem varyansı

$$= \frac{(24-14)^2 + (12-14)^2 + (18-14)^2 + (2-14)^2}{3} = \frac{100+4+16+144}{3}$$
$$= \frac{264}{3} = 88$$

olarak bulunur.

$\underline{b}'\underline{X}$ ile $\underline{c}'\underline{X}$ lineer bileşimleri arasındaki örneklem kovaryansı

$$= \frac{(-11-4)(24-14)+(7-4)(12-14)+(0-4)(18-14)+(20-4)(2-14)}{3}$$

$$= \frac{-150-6-16-192}{3} = \frac{-364}{3} = \frac{-364}{3} = -121.33$$

dır.

b. X veri matrisinden örneklem ortalama vektörü ve örneklem varyans-kovaryans matrisi

$$\underline{\mathrm{x}} = \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ ve } S = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & -4 & \frac{10}{3} \\ -4 & \frac{26}{3} & \frac{-5}{3} \\ \frac{10}{3} & \frac{-5}{3} & \frac{26}{3} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Buradan

$\underline{b}'\underline{X}$ ' örneklem ortalaması,

$$\begin{aligned} \underline{b}'\underline{\mathrm{x}} = &= \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= (2)(4) + (-3)(3) + (1)(5) \\ &= 4 \end{aligned}$$

$\underline{b}'\underline{X}$ ' örneklem varyansı

$$\underline{b}'S\underline{b} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & -4 & \frac{10}{3} \\ -4 & \frac{26}{3} & \frac{-5}{3} \\ \frac{10}{3} & \frac{-5}{3} & \frac{26}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{62}{3} \\ \frac{-107}{3} \\ \frac{61}{3} \end{bmatrix}$$

$$= (2)(\frac{62}{3}) + (-3)(\frac{-107}{3}) + (1)(\frac{61}{3})$$

$$= \frac{506}{3}$$

elde edilir. Aynı şekilde

$\underline{c}'\underline{X}$ ' örneklem ortalaması,

$$\underline{c}'\overline{\mathrm{x}} = = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= (3)(4) + (4)(3) + (-2)(5)$$

$$= 14$$

$\underline{c}'\underline{X}$ ' örneklem varyansı

$$\underline{c}'S\underline{c} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & -4 & \frac{10}{3} \\ -4 & \frac{26}{3} & \frac{-5}{3} \\ \frac{10}{3} & \frac{-5}{3} & \frac{26}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-44}{3} \\ \frac{78}{3} \\ \frac{-42}{3} \end{bmatrix}$$

$$= (3)(\frac{-44}{3}) + (4)(\frac{78}{3}) + (-2)(\frac{-42}{3})$$

$$= \frac{264}{3} = 88$$

olarak bulunur.

Ayrıca $\underline{b}'\underline{X}$ ile $\underline{c}'\underline{X}$ lineer bileşimleri arasındaki örneklem kovaryansı

$$\underline{b}'S\underline{c} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & -4 & \frac{10}{3} \\ -4 & \frac{26}{3} & \frac{-5}{3} \\ \frac{10}{3} & \frac{-5}{3} & \frac{26}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-44}{3} \\ \frac{78}{3} \\ \frac{-42}{3} \end{bmatrix}$$

$$= (2)(\frac{-44}{3}) + (-3)(\frac{78}{3}) + (1)(\frac{-42}{3})$$

$$= \frac{-364}{3} = -121.33$$

Sonuçta **a.** ve **b.** şıklarında aynı sonuçlar elde edilmiştir.

Rasgele Örneklem, Örneklem Ortalama Vektörü ve Örneklem Varyans-Kovaryans Matrisinin Beklenen Değeri

İstatistiksel sonuç çıkarımı yapabilmek için örneklem ortalama vektörü $\underline{\bar{X}}$ ve örneklem varyans-kovaryans matrisi S_n gibi istatistiklerin örneklemden örnekleme değişkenliği incelenirken, değişkenler hakkında varsayımlar yapmaya ihtiyaç vardır.

Verilerin henüz gözlenmediğini ancak n tane birim üzerinde, p tane değişkenin ölçüleceği kabul edilir. Ölçümler yapılmadan önce, genellikle ölçümlerin aldığı değerler tam olarak bilinmemektedir. Sonuç olarak bu ölçümlere rasgele değişken olarak bakılır. Veri matrisinin (i,j) inci elamanı $X_{ij}(i=1,2,...,p\ ;\ j=1,2,...,n)$ rasgele değişkeni olsun. p tane değişken üzerinde $\underline{X}_j$ ölçümlerin her kümesi bir rasgele vektördür ve bu vektörlerden oluşan rasgele matris

$$X_{pxn}=\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1j} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2j} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{i1} & X_{i2} & \cdots & X_{ij} & \cdots & X_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{p1} & X_{p2} & \cdots & X_{pj} & \cdots & X_{pn} \end{bmatrix}=\left[\underline{X}_1,\underline{X}_2,...,\underline{X}_j,...,\underline{X}_n\right]$$

biçimindedir.

X_{pxn} matrisindeki $\underline{X}_1,\underline{X}_2,...,\underline{X}_n$ sütun vektörleri, $f_{\underline{X}}(\underline{\mathrm{x}})=f(x_1,x_2,...,x_p)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip ortak dağılımdan bağımsız gözlemler verirlerse, $\underline{X}_1,\underline{X}_2,...,\underline{X}_n$, $f_{\underline{X}}(\underline{\mathrm{x}})$ den rasgele bir örneklem formudur denir. Matematiksel olarak $\underline{X}_1,\underline{X}_2,...,\underline{X}_n$ ' in rasgele örneklem olması için ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_1(\underline{\mathrm{x}}_1),f_2(\underline{\mathrm{x}}_2),\cdots,f_n(\underline{\mathrm{x}}_n)$ fonksiyonlarının çarpımı ile verilmektedir. Burada $f(\underline{\mathrm{x}}_j)=f(x_{1j},x_{2j},...,x_{pj})$, j inci sütun vektörü için yoğunluk fonksiyonudur.

Sonuç: $\underline{X}_1,\underline{X}_2,...,\underline{X}_n$ ortalama vektörü $\underline{\mu}$ ve varyans-kovaryans matrisi Σ olan ortak dağılımdan rasgele bir örneklem olmak üzere

a. $E(\underline{\bar{X}})=\underline{\mu}$

b. $Cov(\underline{\bar{X}})=\dfrac{1}{n}\Sigma$

c. $E(S_n)=(\dfrac{n-1}{n})\Sigma$

dir.

İspat :

a.

$$E(\underline{\overline{X}}) = E\left(\frac{(\underline{X}_1 + \underline{X}_2 + \cdots + \underline{X}_n)}{n}\right)$$
$$= E\left(\frac{\underline{X}_1}{n}\right) + E\left(\frac{\underline{X}_2}{n}\right) + \cdots + E\left(\frac{\underline{X}_n}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{n}E(\underline{X}_1) + \frac{1}{n}E(\underline{X}_2) + \cdots + \frac{1}{n}E(\underline{X}_n)$$
$$= \frac{1}{n}\underline{\mu} + \frac{1}{n}\underline{\mu} + \cdots + \frac{1}{n}\underline{\mu}$$
$$= \frac{1}{n}n\underline{\mu}$$
$$= \underline{\mu}$$

dir ve buradan örneklem ortalama vektörü $\underline{\overline{X}}$, kitle ortalama vektörü $\underline{\mu}$ ’nün yansız bir tahmin edicisidir.

b.

$$Cov(\underline{\overline{X}}) = E\left((\underline{\overline{X}} - \underline{\mu})(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu})'\right)$$
$$= E\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\underline{X}_j - \underline{\mu})\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}(\underline{X}_l - \underline{\mu})\right)'\right]$$
$$= E\left(\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(\underline{X}_j - \underline{\mu})(\underline{X}_l - \underline{\mu})'\right)$$
$$= \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}E\left((\underline{X}_j - \underline{\mu})(\underline{X}_l - \underline{\mu})'\right)$$

dir. $\underline{X}_j$ ’ler bağımsız olduğundan $j \neq l$ için $E\left((\underline{X}_j - \underline{\mu})(\underline{X}_l - \underline{\mu})'\right) = 0$ dır. Buradan

$$Cov(\underline{\overline{X}}) = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}E\left((\underline{X}_j - \underline{\mu})(\underline{X}_j - \underline{\mu})'\right)$$
$$= \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}(\Sigma)$$
$$= \frac{1}{n^2}n\Sigma$$
$$= (\frac{1}{n})\Sigma$$

elde edilir.

c.

$$E(S_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\underline{X}_j - \underline{\overline{X}})(\underline{X}_j - \underline{\overline{X}})' \right)$$

$$= E\left(\frac{1}{n}(\sum_{j=1}^{n}(\underline{X}_j - \underline{\overline{X}})(\underline{X}_j)' + \sum_{j=1}^{n}(\underline{X}_j - \underline{\overline{X}})(-\underline{\overline{X}})') \right)$$

$$= E\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\underline{X}_j\underline{X}_j' - n\underline{\overline{X}}\underline{\overline{X}}' \right) \right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}E(\underline{X}_j\underline{X}_j') - nE(\underline{\overline{X}}\underline{\overline{X}}') \right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(\Sigma + \underline{\mu}\underline{\mu}') - n(\frac{1}{n}\Sigma + \underline{\mu}\underline{\mu}') \right)$$

$$= \frac{1}{n}\left((n\Sigma + n\underline{\mu}\underline{\mu}') - n(\frac{1}{n}\Sigma + \underline{\mu}\underline{\mu}') \right)$$

$$= (\frac{n-1}{n})\Sigma$$

dir ve buradan örneklem varyans-kovaryans matrisi S_n, kitle varyans-kovaryans matrisi Σ için yanlı bir tahmin edicidir. Bununla birlikte

$$S = (\frac{n}{n-1})S_n$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(\underline{X}_j - \underline{\overline{X}})(\underline{X}_j - \underline{\overline{X}})'$$

kitle varyans-kovaryans matrisi Σ için yansız bir tahmin edicidir. Yani $E(S) = \Sigma$ dir. Bundan sonra S_n yerine, örneklem varyans-kovaryans matrisi olarak S alınacaktır.

Genelleştirilmiş Varyans

p değişken her birim üzerinde gözlendiğinde, değişim örneklem varyans –kovaryans matrisi *S* ile ifade edilir. *pxp* tipinde simetrik örneklem varyans-kovaryans matrisi *S*, *p* tane varyans ve $\frac{1}{2}p(p-1)$ tane farklı kovaryanstan oluşmaktadır. Bazen *S* ‘deki değişim tek bir sayısal değer ile ifade edilebilir. Bu değerlerden biri *S*’nin determinantı olabilir. $p=1$ olduğunda bu determinant tek bir değişkenin örneklem varyansıdır. Örneklem varyans-kovaryans matrisi *S*’nin determinantına Genelleştirilmiş Örneklem Varyansı(*GÖV*) denir ve

$$GÖV = |S|$$

dir. Genelleştirilmiş Örneklem Varyansı, bütün varyanslar ve kovaryanslara ilişkin tek bir değer şeklinde bilgi verir. Bununla birlikte $|S|$, *S*'nin özet bir değerinden başkada bilgiler verir. Örneğin

$$|S| = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i$$

dir. Burada $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ 'ler örneklem varyans-kovaryans matrisi *S*'nin özdeğerleridir.

Bazı Eşitsizlikler

Burada ileride kullanılacak bazı eşitsizliklere ilişkin ifadeler verilecek, ispatlar verilmeyecek.

Cauchy-Schwarz Eşitsizliği

$\underline{b}$ ve $\underline{d}$, $px1$ tipinde herhangi iki vektör olsun. Buradan,

$$(\underline{b}'\underline{d})^2 \le (\underline{b}'\underline{b})(\underline{d}'\underline{d})$$

dir. Eşitliğin olması için gerek ve yeter şart bazı c sabitleri için $\underline{b} = c\underline{d}$ (veya $\underline{d} = c\underline{b}$) dir.

Genelleştirilmiş Cauchy-Schwarz Eşitsizliği

$\underline{b}$ ve $\underline{d}$, $px1$ tipinde herhangi iki vektör ve B, pxp tipinde pozitif tanımlı bir matris olsun. Buradan,

$$(\underline{b}'\underline{d})^2 \le (\underline{b}'B\underline{b})(\underline{d}'B^{-1}\underline{d})$$

dir. Eşitliğin olması için gerek ve yeter şart bazı c sabitleri için $\underline{b} = cB^{-1}\underline{d}$ (veya $\underline{d} = cB\underline{b}\ \underline{d}$) dir.

Maksimizasyon Lemma

B, pxp tipinde pozitif tanımlı bir matris ve $\underline{d}$, $px1$ tipinde herhangi bir vektör olsun. Sıfırdan farklı herhangi bir $\underline{\mathrm{x}}_{px1}$ vektörü için

$$\max_{\underline{x} \neq \underline{0}} \frac{(\underline{x}'\underline{d})^2}{\underline{x}'B\underline{x}} = \underline{d}'B\underline{d}$$

dir. $c \neq 0$ için $\mathrm{x} = cB^{-1}\underline{d}$ ise maksimuma ulaşılır.

Birim Küre Üzerindeki Noktalar için Karesel Formların Maksimizasyonu

B, pxp tipinde özdeğerleri $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p > 0$ ve ilişkili birimleştirilmiş özvektörleri $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \cdots, \underline{e}_p$ olan pozitif tanımlı bir matris olsun. Buradan

$$\max_{\underline{x} \neq \underline{0}} \frac{\underline{x}'B\underline{x}}{\underline{x}'\underline{x}} = \lambda_1 \quad , \underline{x} = \underline{e}_1 \text{'de maksimuma ulaşır}$$

$$\max_{\underline{x} \neq \underline{0}} \frac{\underline{x}'B\underline{x}}{\underline{x}'\underline{x}} = \lambda_2 \quad , \underline{x} = \underline{e}_2 \text{'de ikinci sırada maksimuma ulaşır}$$

$$\vdots$$

$$\max_{\underline{x} \neq \underline{0}} \frac{\underline{x}'B\underline{x}}{\underline{x}'\underline{x}} = \lambda_p \quad , \underline{x} = \underline{e}_\mathrm{p} \text{'de } p \text{ inci sırada maksimuma ulaşır}$$

dir.