11. HAFTA

Kitle Ortalama Vektörü Hakkında Sonuç Çıkarımları

Tek değişkenli durumda X rasgele değişkeni ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan normal dağılıma sahip olsun. $H_0: \mu = \mu_0$ hipotezinin, $H_1: \mu \neq \mu_0$ hipotezine karşı testinde varyansın bilinmediği durumda test istatistiği $t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$ dir ve burada, $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$ ve $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^2$ dir. Gözlenen $|t|$ değeri, $n-1$ serbestlik dereceli $t_{n-1}(\alpha/2)$ tablo değerinden büyük ise H_0 hipotezi reddedilir. $|t|$ büyük olduğunda H_0'ın rededilmesi, t^2'nin büyük olduğunda H_0'ın reddedilmesine eşdeğerdir. Buradan

$$t^2 = \frac{(\overline{X} - \mu_0)^2}{S^2/n} = n(\overline{X} - \mu_0)'(S^2)^{-1}(\overline{X} - \mu_0)$$

olmak üzere, t^2, $\overline{X}$ örneklem ortalamasından, μ_0 test değerine karesel uzaklıktır. Buradan

$$n(\overline{x} - \mu_0)'(S^2)^{-1}(\overline{x} - \mu_0) > t_{n-1}^2(\alpha/2)$$

ise, α anlam düzeyinde H_1'e karşı H_0 hipotezi reddedilir. Burada $t_{n-1}(\alpha/2)$, $n-1$ serbestlik dereceli *t*-dağılımının $\alpha/2$ yüzdeliğinin üst sınırıdır.

Eğer H_0 reddedilmez ise, μ_0'ın normal kitle ortalaması için uygun değer olduğunu söyleyebiliriz. Buradan şu soru akla gelebilir. Veriler ile tutarlı μ'nün başka değerleri var mıdır?

Bu sorunun cevabı evettir. Gerçekten normal kitle ortalaması için her zaman uygun değerler kümesi vardır. $H_0: \mu = \mu_0$ hipotezinin, $H_1: \mu \neq \mu_0$ hipotezine karşı testi için kabul bölgeleri ile μ için güven aralıkları arasında ilişki söz konusudur.

α anlam düzeyinde $H_0 : \mu = \mu_0$'ın reddedilememesi yani $\left|\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}\right| \leq t_{n-1}(\alpha / 2)$ olması, μ_0'ın $\bar{x} \pm t_{n-1}(\alpha / 2)\dfrac{S}{\sqrt{n}}$, $(1-\alpha)$ güven aralığında yer alması anlamına gelir. Güven aralığı, $H_0 : \mu = \mu_0$ hipotezi ile reddedilemeyecek μ_0'ın tüm değerlerini içerir.

Örneklem seçilmeden önce, $1-\alpha$'lık güven aralığının alt ve üst sınırları $\bar{X}$ ve S^2 istatistiklerine bağlı olduğundan aralık rasgeledir. Bir çok bağımsız $1-\alpha$'lık aralıktan, bir aralığın μ'yü içermesi olasılığı $1-\alpha$ dır.

Eğer $\underline{\mu}_0$, $px1$ tipinde verilen bir vektör ise, bu durumda Çok Değişkenli Normal Dağılımın ortalama vektörü için uygun değerin belirlenmesi problemi göz önüne alınmalıdır. Böylece tek değişkenli için verilen kare uzaklığı, çok değişkenli durum için genelleştirilir ise,

$$\begin{aligned} T^2 &= (\underline{\bar{X}} - \underline{\mu}_0)'(\frac{S}{n})^{-1}(\underline{\bar{X}} - \underline{\mu}_0) \\ &= n(\underline{\bar{X}} - \underline{\mu}_0)'S^{-1}(\underline{\bar{X}} - \underline{\mu}_0) \end{aligned}$$

istatistiği elde edilir. Burada,

$$\underline{\bar{X}}_{px1} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\underline{X}_j$$

$$S_{pxp} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(\underline{X}_j - \underline{\bar{X}})(\underline{X}_j - \underline{\bar{X}})'$$

ve

$$\underline{\mu}_0 = \begin{bmatrix} \mu_{10} \\ \mu_{20} \\ \vdots \\ \mu_{p0} \end{bmatrix}$$

dır. Elde edilen bu T^2 istatistiğine Hotelling's T^2'si denmektedir. Gözlenen T^2 genelleştirilmiş uzaklık oldukça büyük ise; yani $\underline{\bar{x}}$, $\underline{\mu}_0$'dan oldukça uzak ise $H_0 : \underline{\mu} = \underline{\mu}_0$ hipotezi reddedilir. H_0 hipotezinin reddine veya reddedilmemesine karar vermek için T^2 istatistiğinin dağılımına göre bulunan kritik değere ihtiyaç vardır. T^2 istatistiğinin dağılımı

$$T^2 \sim \frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,\, n-p}$$

dır ve burada $F_{p,\, n-p}$, p ve n-p serbestlik dereceli F dağılımına sahip bir rasgele değişkendir.

Sonuç olarak; $\underline{X}_1, \underline{X}_2, ..., \underline{X}_n$, $N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$ dağılımından rasgele bir örneklem olduğunda

$$\alpha = P[T^2 = n(\underline{\bar{X}} - \underline{\mu}_0)' S^{-1} (\underline{\bar{X}} - \underline{\mu}_0) > \frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)]$$

dır ve $H_0 : \underline{\mu} = \underline{\mu}_0$ hipotezinin, $H_1 : \underline{\mu} \neq \underline{\mu}_0$ hipotezine karşı testinde

$$T^2 = n(\underline{\bar{x}} - \underline{\mu}_0)' S^{-1} (\underline{\bar{x}} - \underline{\mu}_0) > \frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)$$

ise, α anlam düzeyinde $H_0 : \underline{\mu} = \underline{\mu}_0$ hipotezi, $H_1 : \underline{\mu} \neq \underline{\mu}_0$ hipotezine karşı reddedilir.

Örnek: İki değişkenli normal kitleden alınan $n = 3$ birimlik rasgele örnekleme ilişkin veri matrisi

$$X_{2x3} = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 8 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

olsun. Bu örneklemin ortalama vektörü $\underline{\mu}_0' = [9, 5]$ olan kitleden alınıp alınmadığına ilişkin test istatistiğinin dağılımını vererek, $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinde test ediniz.

Çözüm: $n = 3$, $p = 2$

$$\frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p} = \frac{(3-1)2}{(3-2)} F_{2,3-2}$$
$$= 4F_{2,1}$$

olmak üzere

$T^2 \sim 4F_{2,1}$ dağılır.

$$H_0 : \underline{\mu} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$H_1 : \underline{\mu} \neq \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}$$

hipotezinin testi için

$$T^2 = n(\underline{\bar{x}} - \underline{\mu}_0)' S^{-1} (\underline{\bar{x}} - \underline{\mu}_0)$$

değeri elde edilmelidir.

$$\underline{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6+10+8}{3} \\ \frac{9+6+3}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$s_{11} = \frac{(6-8)^2 + (10-8)^2 + (8-8)^2}{2} = 4$$

$$s_{22} = \frac{(9-6)^2 + (6-6)^2 + (3-6)^2}{2} = 9$$

$$s_{12} = \frac{(6-8)(9-6) + (10-8)(6-6) + (8-8)(6-3)}{2} = -3$$

olmak üzere

$$S = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/9 \\ 1/9 & 4/27 \end{bmatrix}$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} T^2 &= 3(\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix})' \begin{bmatrix} 1/3 & 1/9 \\ 1/9 & 4/27 \end{bmatrix} (\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}) \\ &= 3(-1 \quad 1) \begin{bmatrix} -2/9 \\ 1/27 \end{bmatrix} \\ &= 7/9 \\ &= 0.777 \end{aligned}$$

dır ve kritik değer

$$\begin{aligned} \frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha) &= \frac{(3-1)2}{(3-2)} F_{2,3-2}(0.05) \\ &= 4F_{2,1}(0.05) \\ &= 4(199.71) \\ &= 798.84 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece $T^2 = 0.777 < 798.84$ olduğundan H_0 reddedilemez.

Örnek: 20 sağlıklı kadının terinin oranına, sodyum ve potasyum içeriğine ilişkin aşağıdaki değerler elde edilmiştir. Bu örneklemin kitle ortalama vektörü $\underline{\mu}' = \begin{bmatrix} 4 & 50 & 10 \end{bmatrix}$ olan normal bir kitleden alınıp alınmadığını $\alpha = 0.10$ anlam düzeyinde test ederek, sonucu yorumlayınız.

Birimler	Ter Oranı x_1	Sodyum İçeriği x_2	Potasyum İçeriği x_3
1	3.7	48.5	9.3
2	5.7	65.1	8.0
3	3.8	47.2	10.9
4	3.2	53.2	12.0
5	3.1	55.5	9.7
6	4.6	36.1	7.9
7	2.4	24.8	14.0
8	7.2	33.1	7.6
9	6.7	47.4	8.5
10	5.4	54.1	11.3
11	3.9	36.9	12.7
12	4.5	58.8	12.3
13	3.5	27.8	9.8
14	4.5	40.2	8.4
15	1.5	13.5	10.1
16	8.5	56.4	7.1
17	4.5	71.6	8.2
18	6.5	52.8	10.9
19	4.1	44.1	11.2
20	5.5	40.9	9.4

Çözüm: Hipotez

$$H_0 : \underline{\mu} = \begin{bmatrix} 4 \\ 50 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$H_1 : \underline{\mu} \neq \begin{bmatrix} 4 \\ 50 \\ 10 \end{bmatrix}$$

olmak üzere, yukarıdaki verilere ilişkin özet istatistikler (örneklem ortalama vektörü ve örneklem varyans kovaryans matrisi)

$$\underline{\text{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.640 \\ 45.400 \\ 9.965 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad S = \begin{bmatrix} 2.879 & 10.002 & -1.810 \\ 10.002 & 199.798 & -5.627 \\ -1.810 & -5.627 & 3.628 \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir. Buradan,

$T^2 = n(\underline{\text{x}} - \underline{\mu}_0)' S^{-1} (\underline{\text{x}} - \underline{\mu}_0)$ değerini elde etmek için

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 0.586 & -0.022 & 0.258 \\ -0.022 & 0.006 & -0.002 \\ 0.258 & -0.002 & 0.402 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$T^2 = 20\left(\begin{bmatrix} 4.640 \\ 45.400 \\ 9.965 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 50 \\ 10 \end{bmatrix} \right)' \begin{bmatrix} 0.586 & -0.022 & 0.258 \\ -0.022 & 0.006 & -0.002 \\ 0.258 & -0.002 & 0.402 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 4.640 \\ 45.400 \\ 9.965 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 50 \\ 10 \end{bmatrix} \right)$$

$$= 20\begin{bmatrix} 0.640 & -4.600 & -0.035 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.467 \\ -0.042 \\ 0.160 \end{bmatrix}$$

$$= 9.74$$

olarak bulunur. Kritik değer

$$\frac{(n-1)p}{(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)=\frac{(20-1)3}{(20-3)}F_{3,20-3}(0.10)$$
$$=3.353F_{3,17}(0.10)$$
$$=3.353(2.44)$$
$$=8.18$$

olmak üzere $T^2=9.74>8.18$ olduğundan H_0 reddedilir ve bu örneklemin, kitle ortalama vektörü $\underline{\mu}'=\begin{bmatrix}4 & 50 & 10\end{bmatrix}$ olan bir kitleden alınmadığı sonucuna varılır. Ancak burada hipotezin reddine sebep olan bileşenin de belirlenmesi önemlidir. Bu durum ileride verilecektir.

Sonuç: T^2 istatistiği, $\underline{X}_{px1}$ rasgele vektörü için $\underline{Y}_{px1}=C_{pxp}\underline{X}_{px1}+\underline{d}_{px1}$ dönüşümü altında değişmezdir. Yani $T^2_{\underline{X}}=T^2_{\underline{Y}}$ dir. Burada *C* elemanları sabitler olan ve tersi alınabilen bir matris, $\underline{d}$ elemanları sabitler olan bir vektördür.

İspat: $\underline{X}_{px1}$ rasgele vektörünün için

$$\begin{aligned}\underline{\mu}_Y&=E(\underline{Y})\\&=E(C\underline{X}+\underline{d})\\&=CE(\underline{X})+\underline{d}\\&=C\underline{\mu}_X+\underline{d}\end{aligned}\quad,\quad \underline{\mu}_{Y.0}=C\underline{\mu}_{X.0}+\underline{d}\quad,\quad \begin{aligned}\hat{\underline{\mu}}_Y&=\overline{\underline{Y}}\\&=C\overline{\underline{X}}+\underline{d}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_Y&=Cov(\underline{Y})\\&=Cov(C\underline{X}+\underline{d})\\&=Cov(C\underline{X})\\&=C\ \Sigma_X C'\end{aligned}\quad,\quad \begin{aligned}\hat{\Sigma}_Y&=S_Y\\&=C\ S_X C'\end{aligned}$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
T^2_{\underline{Y}} &= n(\underline{\overline{Y}} - \underline{\mu}_{Y.0})' S_Y^{-1} (\underline{\overline{Y}} - \underline{\mu}_{Y.0}) \\
&= n\left[(C\underline{\overline{X}} + \underline{d}) - (C\underline{\mu}_{X.0} + \underline{d})\right]' (CS_X C)^{-1} \left[(C\underline{\overline{X}} + \underline{d}) - (C\underline{\mu}_{X.0} + \underline{d})\right] \\
&= n\left[C(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu}_{X.0})\right]' (CS_X C)^{-1} C(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu}_{X.0}) \\
&= n(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu}_{X.0})' C'(C')^{-1} S_X^{-1} C^{-1} C \ (\underline{\overline{X}} - \underline{\mu}_{X.0}) \\
&= n(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu}_{X.0})' I \ S_X^{-1} \ I \ (\underline{\overline{X}} - \underline{\mu}_{X.0}) \\
&= n(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu}_{X.0})' S_X^{-1} (\underline{\overline{X}} - \underline{\mu}_{X.0}) \\
&= T^2_{\underline{X}}
\end{aligned}
$$

olur.

Hotelling T^2 ve Olabilirlik Oran Testleri

T^2 istatistiği tek değişkenli t^2 istatistiğine ilişkin ifadeden yararlanılarak elde edilmişti. Ancak test istatistikleri olabilirlik oran yönteminden de elde edilebilir. Olabilirlik oran testleri, büyük örneklemler için bir çok optimal özelliğe sahiptir.

$\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$ olmak üzere, çok değişkenli normal dağılımın olabilirlik fonksiyonunun $\underline{\mu}$ ve Σ üzerinden maksimumu

$$
\max_{\underline{\mu},\Sigma} L(\underline{\mu}, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{np/2} \left|\hat{\Sigma}\right|^{n/2}} e^{-np/2}
$$

olduğu daha önce verilmişti. Burada

$$
\hat{\underline{\mu}} = \underline{\overline{X}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \underline{X}_j \qquad \text{ve} \qquad \hat{\Sigma} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} (\underline{X}_j - \underline{\overline{X}})(\underline{X}_j - \underline{\overline{X}})'
$$

çok değişkenli normal dağılımın en çok olabilirlik tahmin edicileridir.

$H_0 : \underline{\mu} = \underline{\mu}_0$ hipotezi altında, çok değişkenli normal dağılımın olabilirlik fonksiyonu

$$
L(\underline{\mu}_0, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{np/2} |\Sigma|^{n/2}} \, e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} (\underline{x}_j - \underline{\mu}_0)' \Sigma^{-1} (\underline{x}_j - \underline{\mu}_0)}
$$

biçimindedir. $L(\underline{\mu}_0, \Sigma)$ olabilirlik fonksiyonunun, Σ 'ya göre maksimize edilmesiyle Σ 'nın en çok olabilirlik tahmin edicisi bulunabilir. *e* üzeri ifade

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(\underline{x}_j - \underline{\mu}_0)'\,\Sigma^{-1}(\underline{x}_j - \underline{\mu}_0) = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} tr[\Sigma^{-1}(\underline{x}_j - \underline{\mu}_0)(\underline{x}_j - \underline{\mu}_0)']$$
$$= -\frac{1}{2} tr[\Sigma^{-1}(\sum_{j=1}^{n}(\underline{x}_j - \underline{\mu}_0)(\underline{x}_j - \underline{\mu}_0)')]$$

olarak düzenlenip ve daha önceki verilen sonuçlardan,

$$B = \sum_{j=1}^{n}(\underline{x}_j - \underline{\mu}_0)(\underline{x}_j - \underline{\mu}_0)' \quad \text{ve} \quad b = \frac{n}{2}$$

alınırsa olabilirlik fonksiyonunun Σ üzerinden maksimumu

$$\max_{\Sigma} L(\underline{\mu}_0, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{np/2}\left|\hat{\Sigma}_0\right|^{n/2}} e^{-np/2}$$

dır. Burada $\hat{\Sigma}_0 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\underline{X}_j - \underline{\mu}_0)(\underline{X}_j - \underline{\mu}_0)'$ dır.

$\underline{\mu}$ için uygun olan değer olarak $\underline{\mu}_0$ 'ın alınmasıyla $L(\underline{\mu}_0, \Sigma)$ 'nın Σ 'ya göre maksimumunun, $L(\underline{\mu}, \Sigma)$ 'nın $\underline{\mu}$ ve Σ 'ya göre maksimumuna oranlanmasıyla elde edilen istatistiğe Olabilirlik oran İstatistiği denir. Bu istatistik Λ ile gösterilir ve

$$\Lambda = \frac{\max_{\Sigma} L(\underline{\mu}_0, \Sigma)}{\max_{\underline{\mu}, \Sigma} L(\underline{\mu}, \Sigma)}$$
$$= \frac{\dfrac{1}{(2\pi)^{np/2}\left|\hat{\Sigma}_0\right|^{n/2}} e^{-np/2}}{\dfrac{1}{(2\pi)^{np/2}\left|\hat{\Sigma}\right|^{n/2}} e^{-np/2}}$$
$$= \left(\frac{\left|\hat{\Sigma}\right|}{\left|\hat{\Sigma}_0\right|}\right)^{n/2}$$

dir.

Λ'ya eşdeğer olan $\Lambda^{2/n} = \frac{|\hat{\Sigma}|}{|\hat{\Sigma}_0|}$ istatistiğine Wilk's in lamdası adı verilir. Eğer olabilirlik oran istatistiğinin gözlenen değeri oldukça küçük ise $H_0 : \underline{\mu} = \underline{\mu}_0$ hipotezi doğru olmaz ve reddedilir. Özel olarak $H_0 : \underline{\mu} = \underline{\mu}_0$'ın, $H_1 : \underline{\mu} \neq \underline{\mu}_0$'e karşı testinde

$$\Lambda = \left(\frac{|\hat{\Sigma}|}{|\hat{\Sigma}_0|} \right)^{n/2}$$

$$= \left(\frac{\left| \sum_{j=1}^{n} (\underline{\mathrm{x}}_j - \overline{\underline{\mathrm{x}}})(\underline{\mathrm{x}}_j - \overline{\underline{\mathrm{x}}})' \right|}{\left| \sum_{j=1}^{n} (\underline{\mathrm{x}}_j - \underline{\mu}_0)(\underline{\mathrm{x}}_j - \underline{\mu}_0)' \right|} \right) < C_\alpha$$

ise H_0 reddedilir. Burada C_α, Λ istatistiğinin dağılımının α'lık alt yüzdeliğidir. H_0 hipotezinin reddine veya reddedilmemesine karar vermek için Λ'nın dağılımdan elde edilecek C_α kritik değerin belirlenmesi gerekir. Olabilirlik oran test istatistiği, genelleştirilmiş örneklem varyanslarının oranlarının bir kuvvetidir.

T^2 ve Λ'nın aşağıda verilen ilişkisinden dolayı Λ'nın dağılımı bulunmadan da karar verilebilir.

Sonuç: $\underline{X}_1, \underline{X}_2, ..., \underline{X}_n$, $N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$ dağılımından rasgele bir örneklem olsun.

$$H_0 : \underline{\mu} = \underline{\mu}_0$$

$$H_1 : \underline{\mu} \neq \underline{\mu}_0$$

hipotezlerinin testi için verilen

$$T^2 = n(\overline{\underline{\mathrm{x}}} - \underline{\mu}_0)' S^{-1} (\overline{\underline{\mathrm{x}}} - \underline{\mu}_0) > \frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)$$

testi,

$$\Lambda^{2/n} = (1 + \frac{T^2}{(n-1)})^{-1}$$

olduğundan, olabilirlik oran testine eşdeğerdir.