Bölüm 4

Altgruplar

Bu bölümde verilen bir grubun altkümelerinden hangilerinin grubun işlemine göre grup yapısına sahip olduğunu araştıracağız.

4.1 Altgruplar

Bu kısımda bir grubun altkümelerinin altgrup olması için gerek ve yeter şartları belirleyeceğiz.

Tanım 4.1.1 *$(G, *)$ ve $(H, \triangle)$ gruplar olsun. Eğer*

(1) *$H \subseteq G$,*

(2) *her $a,\ b \in H$ için $a \triangle b = a * b$ ise*

o zaman H ya G nin bir **altgrubu** *denir ve $H \leq G$ şeklinde gösterilir. Eğer $H \leq G$ ve $H \neq G$ ise o zaman H ya G nin bir* **öz altgrubu** *denir ve $H < G$ şeklinde gösterilir.*

Örnek 4.1.2 G bir grup, G nin birim elemanı e olmak üzere $\{e\}$ ve G altkümeleri G nin birer altgrubudur. ▲

Tanım 4.1.3 *G bir grup, G nin birim elemanı e olmak üzere $\{e\}$ altgrubuna G nin* **aşikar altgrubu** *denir.*

Örnek 4.1.4 Her $n \in \mathbb{Z}$ için $n\mathbb{Z}$ kümesi $\mathbb{Z}$ nin bir altgrubudur. ▲

Örnek 4.1.5 $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$, girişleri reel sayı olan 2×2 tipindeki tersinir matrislerin grubu olmak üzere

$$H = \{A \in G |\ \det(A) = 2\}$$

altkümesi verilmiş olsun. $A,\ B \in H$ için

$$\det(AB) = \det(A)\,\det(B) = 2 \cdot 2 = 4$$

olduğundan verilen küme matrislerin çarpma işlemine göre kapalı değildir. Diğer bir deyişle Tanım 4.1.1 deki $a \triangle b = ab \notin H$ dır. Bu sebeple H altkümesi G nin bir altgrubu değildir. ▲

Örnek 4.1.6

$$\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$$

grubunun $A = \{\overline{0}, \overline{3}\}$ ve $B = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$ altkümeleri toplama işlemine göre grup olma şartlarını sağladıklarından A ve B altkümeleri $\mathbb{Z}_6$ nın birer altgrubudur. ▲

Şimdi verilen bir grubun bir altkümesinin altgrup olması gerek ve yeter şartları verelim.

Teorem 4.1.7 *G bir grup ve $\emptyset \neq H \subseteq G$ olsun. H nın G nin bir altgrubu olması için gerek ve yeter şart*

(i) *her $x,\ y \in H$ için $xy \in H$,*

(ii) *her $x \in H$ için $x^{-1} \in H$ olmasıdır.*

Toplamsal gruplar için Teorem 4.1.7 deki (i) ve (ii) şartları aşağıdaki biçimde olur:

(i) Her $x,\ y \in H$ için $x + y \in H$ dır.

(ii) Her $x \in H$ için $-x \in H$ dır.

Teorem 4.1.8 *G bir grup ve $\emptyset \neq H \subseteq G$ olsun. $H \leq G$ olması için gerek ve yeter şart her $x,\ y \in H$ için $xy^{-1} \in H$ (toplamsal gruplarda $x - y \in H$) olmasıdır.*

Örnek 4.1.9 $3\mathbb{Z} = \{3k : k \in \mathbb{Z}\}$ kümesini göz önüne alalım.

(i) $3\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ olduğu kolayca gösterilebilir.

(ii) $0 = 3 \cdot 0$ olacak şekilde $0 \in \mathbb{Z}$ var olduğundan, $0 \in 3\mathbb{Z}$ dir. Bu sebeple $3\mathbb{Z} \neq \emptyset$ dir.

(iii) $x,\ y \in 3\mathbb{Z}$ olsun. O zaman $x = 3k_1$ ve $x = 3k_2$ olacak şekilde $k_1,\ k_2 \in \mathbb{Z}$ vardır. $x - y = 3k_1 - 3k_2 = 3(k_1 - k_2) \in 3\mathbb{Z}$ dir.

Bu sebeple $3\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ dir. Fakat $1 \notin 3\mathbb{Z}$ olduğundan $3\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$ dir. ▲

Teorem 4.1.10 *G bir grup ve $\emptyset \neq H \subseteq G$ olsun. Eğer H sonlu ve G grubunun işlemine göre kapalı ise o zaman $H \leq G$ dir.*

Örnek 4.1.11

$$U(7) = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}\}$$

kümesinin çarpma işlemine göre bir grup olduğunu biliyoruz. Şimdi G nin boş olmayan sonlu $H = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}\}$ altkümesini göz önüne alalım. H nin çarpma işlemine göre kapalı olduğu Tablo 4.1 den kolaylıkla görülmektedir. O halde Teorem 4.1.10 gereğince $H < G$ dir.

$\cdot$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$

Tablo 4.1: $H = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}\}$ nin İşlem Tablosu ▲

Örnek 4.1.12 $G = \mathbb{R}^*$ bilinen çarpma işlemine göre bir gruptur. $\mathbb{I}$ irrasyonel sayılar kümesini göstermek üzere

$$H := \{x \in G |\ x = 1 \text{ ya da } x \in \mathbb{I}\}$$

ve

$$K := \{x \in G |\ x \leq -1\}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman $\sqrt{3} \in H$ olmasına rağmen $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3 \notin \mathbb{I}$ olduğundan H, G nin bir altgrubu değildir. Ayrıca $-2 \in K$ olmasına rağmen $(-2)^{-1} \notin K$ olduğundan K da G nin bir altgrubu değildir. ▲

Örnek 4.1.13 G bir grup olsun.

$$Z(G) = \{a \in G : \text{ her } x \in G \text{ için } ax = xa \text{ dır }\}$$

kümesine G nin **merkezi** adı verilir. $Z(G)$, G grubunun bir altgrubudur (Gösteriniz). ▲