Bölüm 5

Permütasyon Grupları

Bu bölümde sonlu bir kümenin permütasyonlarını araştıracağız. Öncelikle "permütasyon" kavramını tanımlayıp bazı özelliklerini inceleyeceğiz. Ayrıca bir grup üzerinde tanımlı eşlenik olma bağıntısını ve bu bağıntı sonucunda ortaya çıkan denklik sınıflarını ele alacağız.

5.1 Permütasyonlar

Tanım 5.1.1 *Bir $\emptyset \neq A$ kümesi üzerinde tanımlı bir birebir ve örten fonksiyona (yani birebir eşlemeye) bir* **permütasyon** *denir.*
Her n pozitif tamsayısı için $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ olmak üzere I_n üzerinde tanımlanan bütün permütasyonların kümesi S_n ile gösterilir.

Örnek 5.1.2 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = 3x - 5$ ile tanımlansın. O zaman f bir birebir eşleme olduğundan f fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir permütasyondur. ▲

Tanım 5.1.3 *$f \in S_n$ ve r bir pozitif tamsayı olmak üzere $J := \{i_1, i_2, \cdots, i_r\} \subseteq I_n$ olsun. Eğer*

$$f(i_1) = i_2, \quad f(i_2) = i_3, \quad \cdots, \quad f(i_{r-1}) = i_r, \quad f(i_r) = i_1$$

ve her $j \in I_n \setminus J$ için $f(j) = j$ ise o zaman f fonksiyonuna uzunluğu r olan bir **devirli permütasyon** *adı verilir ve $f = (i_1, i_2, \cdots, i_r)$ şeklinde gösterilir.*

Örnek 5.1.4 $f = (1, 5, 6, 9, 4) \in S_{10}$ uzunluğu 5 olan bir devirli permütasyondur. Burada $f(1) = 5,\ f(5) = 6,\ f(6) = 9,\ f(9) = 4,\ f(4) = 1$ ve $f(2) = 2,\ f(3) = 3,\ f(7) = 7,\ f(8) = 8,\ f(10) = 10$ dur. ▲

Uyarı 5.1.5 $i_{I_n} : I_n \to I_n$ birim fonksiyonu bir birebir eşleme olduğundan $i_{I_n} \in S_n$ dir. i_{I_n} ye **birim permütasyon** denir ve genellikle (1) şeklinde gösterilir, yani $i_{I_n} = (1)$ dır. ♦

Örnek 5.1.6 I_3 kümesi üzerinde tanımlı bütün permütasyonları belirleyelim. İlk olarak I_3 kümesi üzerindeki farklı permütasyonların sayısını hesaplayalım. f bir birebir eşleme olduğundan $f(1)$ için 3 farklı seçim, $f(2)$ için 2 farklı seçim ve $f(1)$ için de tek bir seçim söz konusudur. Bu nedenle I_3 kümesi üzerindeki farklı permütasyonların sayısı $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ dır. Bu fonksiyonlardan biri I_3 üzerinde tanımlı birim fonksiyondur ve birim fonksiyon yukarıda belirtildiği gibi (1) şeklinde gösterilir. Bir $\alpha : I_3 \to I_3$ permütasyonu verildiğinde bu permütasyon

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \alpha(3) \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda I_3 üzerinde tanımlı bütün permütasyonlar

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1), \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2,3), \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1,2),$$

$$\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1,3), \quad \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1,2,3), \quad \alpha_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1,3,2)$$

şeklindedir. Sonuç **??** gereğince $i = 1,2,3,4,5,6$ için α_i permütasyonlarının herhangi bileşkesi de I_3 kümesi üzerinde tanımlı bir permütasyondur. Şimdi

$$\alpha_2 \circ \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & - & - \end{pmatrix}$$

bileşke fonksiyonunu nasıl belirleyeceğimizi görelim.

$$(\alpha_2 \circ \alpha_5)(1) = \alpha_2(\alpha_5(1)) = \alpha_2(2) = 3$$

$$(\alpha_2 \circ \alpha_5)(2) = \alpha_2(\alpha_5(2)) = \alpha_2(3) = 2$$

$$(\alpha_2 \circ \alpha_5)(3) = \alpha_2(\alpha_5(3)) = \alpha_2(1) = 1$$

olduğundan

$$\alpha_2 \circ \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \alpha_3$$

dür. Sonuç olarak I_3 kümesi üzerindeki bütün permütasyonların kümesi

$$S_3 = \{(1), (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3), (1,3,2)\}$$

şeklindedir. ▲

Teorem 5.1.7 *Her n pozitif tamsayısı için S_n fonksiyonların bileşke işlemine göre bir gruptur. Bu gruba* **simetrik grup** *denir.*

Uyarı 5.1.8 S_n nin elemanlarıyla çalışırken bileşke işlemi kullanılmasına rağmen kolaylık olması için "$\circ$" gösterimini genellikle kullanmayacağız, yani $f,\ g \in S_n$ için $f \circ g$ yerine kısaca fg yazacağız. ♦

Şimdi dönme ve yansımalar yardımıyla ele edilen grupları ele alalım ve bu grupları permütasyonlar ile ifade edelim.

Tanım 5.1.9 *$n \geq 3$ tamsayısı için n kenarlı düzgün bir çokgenin tüm dönme ve yansımalarının oluşturduğu gruba* **dihedral grup** *denir ve D_n ile gösterilir.*

Çokgenin bir köşesi A olmak üzere, O merkezi ve A dan geçen doğruya göre yansımayı b, $0°$ lik dönmeyi 1, $\frac{360}{n}$ derecelik dönmeyi (saatin dönme yönünün tersi kullanılabilir) a ile gösterecek olursak; n tane dönmeyi $1, a, \ldots, a^{n-1}$ ve n tane yansımayı $b, ab, \ldots, a^{n-1}b$ şeklinde ifade edebiliriz. Böylece D_n in bütün elemanları a ve b nin kuvvetlerinin çarpımı olarak elde edilmiş olur. Kolayca $a^n = 1,\ b^2 = 1$ ve $b^{-1}ab = a^{-1}$ olduğu gösterilebilir. Bu bağıntılar, grubun herhangi iki elemanının çarpımının kuralını belirler. Gerçekten $ba^j = a^{-j}b$ ve $(a^ib)(a^jb) = a^iba^jb = a^ia^{-j}bb = a^{i-j}$ olur. Sonuç olarak

$$D_n = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}, b, ab, a^2b, \ldots, a^{n-1}b\}$$

şeklinde ifade edilen bir gruptur.

Şimdi karenin simetri grubu olan D_4 dihedral grubunu bir permütasyon grubu olarak nasıl ifade edeceğimizi görelim.

Örnek 5.1.10 Karenin bütün dönme ve yansımalarından oluşan D_4 dihedral grubunu belirleyelim.

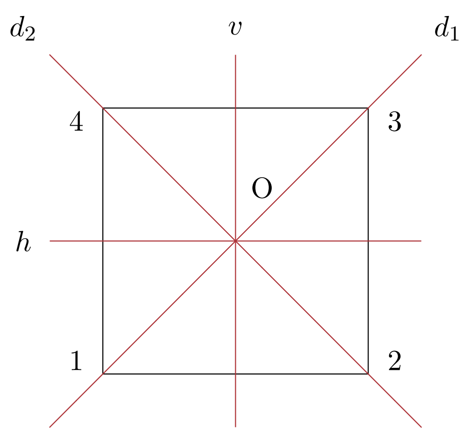

Figure 5.1: Karenin Simetrileri

Karenin hiç hareket etmemesi birim permütasyon (1) ile temsil edilir.

Karenin O merkezi etrafında saatin dönme yönünün tersine 90^o dönmesini $\alpha = (1,2,3,4)$ ile gösterelim. $\alpha^2 = (1,3)(2,4)$ (kareye iki kez α dönüşümünü uygulama) ile O merkezi etrafında saat yönünün tersine 180^o dönme aynıdır. Benzer biçimde $\alpha^3 = (1,4,3,2)$, O merkezi etrafında saat yönünün tersine 270^o dönme ile aynıdır.

h yatay ekseni etrafında bir yansımayı $\beta = (1,4)(2,3)$; d_1 köşegenine göre yansımayı $\gamma = (2,4)$; v dikey eksenine göre yansımayı $\delta = (1,2)(3,4)$ ve d_2 köşegenine göre yansımayı $\phi = (1,3)$ ile gösterelim.

Bu durumda $G = \{e, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \beta, \gamma, \phi, \delta\}$ kümesi fonksiyonların bileşke işlemine göre bir gruptur. Burada $\gamma = \alpha\beta,\ \delta = \alpha^2\beta,\ ve\ \phi = \alpha^3\beta$ olduğu kolaylıkla görülür. Bu gruba **octic grup** adı verilir. ▲

5.2 Permütasyonların Özellikleri

Bu kısımda permütasyonlarının özelliklerini inceleyerek simetrik gruplar hakkında daha fazla bilgi sahibi olacağız.

Tanım 5.2.1 *$\emptyset \neq A$ bir küme ve $\sigma \in S(A)$ olsun. $a \in A$ olmak üzere eğer $\sigma(a) \neq a$ ise o zaman σ, a yı* **hareket ettirir** *denir.*

Uyarı 5.2.2 Eğer $f = (i_1, i_2, \cdots, i_r)$ ise o zaman f, $\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$ kümesinin dışındaki elemanları hareket ettirmez. ♦

Tanım 5.2.3 *$\emptyset \neq A$ bir küme ve $\sigma,\ \tau \in S(A)$ olsun. Eğer σ ve τ permütasyonlarının aynı anda hareket ettirdiği ortak bir eleman yoksa, yani $\sigma(a) \neq a$ şartını sağlayan her $a \in A$ için $\tau(a) = a$ ve $\tau(b) \neq b$ şartını sağlayan her $b \in A$ için $\sigma(b) = b$ ise o zaman σ ve τ permütasyonları* **ayrıktır** *denir.*

Örnek 5.2.4 $\sigma = (1,5,8),\ \tau = (4,3,9) \in S_{10}$ için σ ve τ ayrık permütasyonlardır. Fakat $\gamma = (1,3,5,8),\ \delta = (4,3,9,5) \in S_{10}$ için γ ve δ ayrık permütasyonlar değildir, çünkü $\gamma(3) = 5 \neq 3$ ve $\delta(3) = 9 \neq 3$ tür. Yani γ ve δ nın her ikisi de 3 ü hareket ettirir. ▲

Tanım 5.2.5 *$a \in \{1,2,3,\ldots,n\}$ ve $f \in S_n$ olmak üzere $f^k(a) = (1)$ şartını sağlayan en küçük k pozitif tamsayısı için $\{a, f(a), f^2(a), f^3(a), \ldots, f^{k-1}(a)\}$ kümesine a nın f permütasyonu altındaki* **yörüngesi (orbiti)** *denir.*

Uyarı 5.2.6 $i,\ j \in \{1,2,3,\ldots,n\}$ olmak üzere "$i \sim j$ olması için gerek ve yeter şart i ile j nin aynı yörüngede olmasıdır" bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntı $\{1,2,3,\ldots,n\}$ kümesini denklik sınıflarına ayırır. ♦

Örnek 5.2.7 S_8 de $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 8 & 1 & 5 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ permütasyonunu göz önüne alalım. $f(1) = 3$, $f^2(1) = 8$, $f^3(1) = 4$ ve $f^4(1) = 1$ olduğundan 1 in yörüngesi $\{1,3,8,4\}$ kümesidir. Burada $1,3,8$ ve 4 aynı yörüngede olduklarından denklik sınıfları aynıdır. Yani, 1, 3, 8 ve 4 ün yörüngeleri de $\{1,3,8,4\}$ kümesidir. f permütasyonu 2 ve 5 elemanlarını sabit bıraktığından yörüngeler $\{2\}$ ve $\{5\}$ dir ($f = (1,3,8,4)(2)(5)(6,7)$ olduğuna dikkat ediniz). ▲

Önerme 5.2.8 *Birimden farklı her permütasyon ayrık devirlerin çarpımı olarak tek türlü yazılabilir.*

Örnek 5.2.9 S_9 da $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 8 & 2 & 6 & 7 & 4 & 9 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ permütasyonunu göz önüne alalım. f yi ayrık devirli permütasyonların çarpımı olarak yazalım.

$$\begin{array}{lllll} f(1) & = & 3 & & \\ f^2(1) & = & f(3) & = & 2 \\ f^3(1) & = & f(2) & = & 8 \\ f^4(1) & = & f(8) & = & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{lllll} f(4) & = & 6 & & \\ f^2(4) & = & f(6) & = & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{lllll} f(5) & = & 7 & & \\ f^2(5) & = & f(7) & = & 9 \\ f^3(5) & = & f(9) & = & 5 \end{array}$$

olduğundan $f = (1,3,2,8)(4,6)(5,7,9)$ biçiminde yazılır. ▲

Uyarı 5.2.10 Bir permütasyon birebir ve örten olduğundan tersi mevcuttur. S_n içerisinde her permütasyon ayrık devirlerin çarpımı olarak yazılabileceğinden, $1 \leq i \leq k$ için f_i ler ayrık devirler olmak üzere $f = f_1 f_2 \ldots f_k$ şeklinde yazılabilir. $j = 1,2,\ldots,k$ için $f_j = (i_1, i_2, \cdots, i_r)$ permütasyonunun tersi $f_j^{-1} = (i_1, i_r, i_{r-1}, \cdots, i_2)$ dir. O halde $f^{-1} = f_k^{-1} f_{k-1}^{-1} \ldots f_1^{-1}$ dir. ♦

$n \geq 3$ olmak üzere S_n simetrik grubu genel olarak değişmeli değildir.

Örnek 5.2.11 $f = (1,3,2,4)$, $g = (1,7,6,2) \in S_7$ olsun. fg ve gf çarpımlarını hesaplayalım.

$$\overbrace{\hphantom{1 \xrightarrow{g} 7 \xrightarrow{f} 7}}^{fg} \qquad\qquad \overbrace{\hphantom{1 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{g} 3}}^{gf}$$

$$\begin{array}{lll} 1 \xrightarrow{g} 7 \xrightarrow{f} 7 & \qquad & 1 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{g} 3 \\ 7 \xrightarrow{g} 6 \xrightarrow{f} 6 & & 3 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g} 1 \\ 6 \xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} 4 & & 2 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{g} 4 \\ 3 \xrightarrow{g} 3 \xrightarrow{f} 2 & & 4 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{g} 7 \\ 4 \xrightarrow{g} 4 \xrightarrow{f} 1 & & 7 \xrightarrow{f} 7 \xrightarrow{g} 6 \\ 2 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 3 & & 6 \xrightarrow{f} 6 \xrightarrow{g} 2 \\ 5 \xrightarrow{g} 5 \xrightarrow{f} 5 & & 5 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{g} 5 \end{array}$$

olduğundan $fg = (1,3,2,4)(1,7,6,2) = (1,7,6,4)(2,3)$ ve $gf = (1,7,6,2)(1,3,2,4) = (1,3)(2,4,7,6)$ bulunur. Sonuç olarak $fg \neq gf$ dir. ▲

Teorem 5.2.12 *Ayrık devirlerin çarpımı değişmelidir. Yani $f,\ g \in S_n$ iki ayrık devir ise o zaman $fg = gf$ dir.*

Tanım 5.2.13 *Uzunluğu iki olan devirli bir permütasyona* ***transpozisyon*** *adı verilir.*

Uyarı 5.2.14 Böylece bir transpozisyon (i_1, i_2) şeklindedir. Ayrıca $(i_1, i_2)^{-1} = (i_1, i_2)$ ve $(i_1, i_2)^2 = (1)$ dir. ♦

Örnek 5.2.15 $(1,8),\ (10,20),\ (1,10) \in S_{20}$ birer transpozisyondur. ▲

Uyarı 5.2.16 $r \geq 2$ olmak üzere

$$(i_1, i_2, \ldots, i_r) = (i_1, i_r) \ldots (i_1, i_3)(i_1, i_2)$$

ya da

$$(i_1, i_2, \ldots, i_r) = (i_1, i_2)(i_2, i_3) \ldots (i_{r-1}, i_r)$$

olduğundan uzunluğu 1 den büyük her devirli permütasyon transpozisyonların çarpımı olarak yazılabilir. ♦

Önerme 5.2.17 *Her permütasyon transpozisyonların çarpımı olarak yazılabilir.*

Örnek 5.2.18 S_8 de $f = (1,3,2,4)$ ve $g = (1,7,6,2)$ permütasyonlarının çarpımını gözönüne alalım. $fg = (1,7,6,4)(2,3) = (1,4)(1,6)(1,7)(2,3)$ dür. Diğer taraftan, $fg = (1,4)(1,6)(1,7)(1,2)(1,3)(1,2)$ dir. Böylece fg hem dört hem de altı transpozisyonun çarpımı şeklinde yazılabilir. ▲

Devirli bir permütasyonun transpozisyonların çarpımı olarak yazılışı tek türlü değildir. Fakat her bir yazılışta yer alan transpozisyonların sayısının tekliği veya çiftliği değişmez.

Lemma 5.2.19 *Eğer her $1 \leq i \leq r$ için σ_i ler transpozisyon olmak üzere*

$$\sigma_1 \ldots \sigma_r = (1)$$

ise o zaman r bir çift tamsayıdır.

Sonuç 5.2.20 *Eğer bir permütasyon çift (tek) sayıda permütasyonun çarpımı olarak ifade edilebiliyorsa o zaman bu permütasyonun her transpozisyonlarının çarpımı olarak yazılımı çift (tek) sayıda transposizyon içerir. Sembollerle ifade edersek, eğer* α_i $(1 \leq i \leq r)$ *ve* β_j $(1 \leq j \leq s)$ *birer transpozisyon olmak üzere* $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_r = \beta_1 \dots \beta_s$ *ise o zaman ya* r *ve* s *(her ikisi birden) çift ya da tek tamsayılardır.*

Tanım 5.2.21 *Bir permütasyonun transpozisyonlarının çarpımı olarak yazılışındaki transpozisyonların sayısı çift ise bu permütasyona* **çift permütasyon**, *aksi halde* **tek permütasyon** *adı verilir.*

Örnek 5.2.22 S_8 de $f = (1,3,2,4) = (1,4)(1,2)(1,3)$ olduğundan f tek permütasyondur. Diğer taraftan S_n de $(1) = (1,2)(1,2)$ olduğundan (1) çifttir. ▲

Teorem 5.2.23 S_n *de çift permütasyonların kümesi* S_n *nin bir altgrubudur ve bu altgrubun eleman sayısı* $n!/2$ *dir.*

Tanım 5.2.24 S_n *simetrik grubunun çift permütasyonlardan oluşan altgrubuna* **alterne grup** *adı verilir ve* A_n *ile gösterilir.*

Örnek 5.2.25 S_4 simetrik grubunun altgrubu olan $A_4 = \{(1),(1,2,4),(1,4,2),(1,2)(3,4), (1,2,3),(1,4,3),(2,3,4),(1,3)(2,4),(1,3,2),(1,3,4),(2,4,3),(1,4)(2,3)\}$ şeklindedir. ▲

Şimdi bir grup üzerinde tanımlanan ve "eşlenik olma bağıntısı" olarak adlandırılan önemli bir denklik bağıntısını verelim ve bu denklik bağıntısı sonucunda ortaya çıkan denklik sınıflarını belirleyelim.

Tanım 5.2.26 G *bir grup olsun.* $a,\ b \in G$ *olmak üzere eğer* $b = xax^{-1}$ *olacak şekilde bir* $x \in G$ *varsa o zaman* a *ile* b **eşleniktir** *denir.* G *üzerinde "*$a \sim b$ *olması için gerek ve yeter şart* a *ile* b *eşlenik olmasıdır" şeklinde tanımlanan bağıntıya* **eşlenik olma bağıntısı** *adı verilir.*

Teorem 5.2.27 G *bir grup olmak üzere* G *üzerinde tanımlanan eşlenik olma bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.*

Tanım 5.2.28 G *bir grup olsun.* $a,\ g \in G$ *olmak üzere* $b := gag^{-1}$ *elemanına* a *nın bir* **eşleniği** *ve* $cl(a) = \{gag^{-1} |\ g \in G\}$ *kümesine* a *nın* **eşlenik sınıfı** *denir.*

Örnek 5.2.29 $S_3 = \{(1),(1,2),(1,3),(2,3),(1,2,3),(1,3,2)\}$ simetrik grubunda

$$cl((1,2,3)) = \{\sigma(1,2,3)\sigma^{-1} : \sigma \in S_3\} = \{(1,2,3),(1,3,2)\}$$

$$cl((1,2)) = \{\sigma(1,2)\sigma^{-1} : \sigma \in S_3\} = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$$

şeklindedir. Tahmin edilebileceği gibi $cl((1,2,3))$ ve $cl((1,2))$ sırasıyla $(1,2,3)$ ve $(1,2)$ nin eşlenik sınıflarıdır. Benzer şekilde diğer eşlenik sınıfları da bulunabilir. ▲

Uyarı 5.2.30 Devirli permütasyonların eşleniklerini hesaplamak oldukça kolaydır: $\sigma \in S_n$ için

$$\sigma(i_1, i_2, \ldots, i_r)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \ldots, \sigma(i_r))$$

dir. Böylece $\tau \in S_n$ ayrık devirlerin çarpımı olarak $\tau = \tau_1\tau_2\ldots\tau_r$ şeklinde ise o zaman $\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma\tau_1\sigma^{-1})(\sigma\tau_2\sigma^{-1})(\sigma\tau_r\sigma^{-1})$ dır ve $1 \leq i \leq r$ için $\sigma\tau_i\sigma^{-1}$ yukarıdaki gibi hesaplanır. Böylece $\sigma\tau\sigma^{-1}$ yı hesaplama problemi aslında $\sigma\tau_i\sigma^{-1}$ ları hesaplayıp bileşkelerini almaktan ibarettir. ♦

Örnek 5.2.31 S_4 simetrik grubunda $\sigma = (1, 3, 2)$ ise

$$\sigma(1, 2, 4, 3)\sigma^{-1} = (\sigma(1), \sigma(2), \sigma(4), \sigma(3)) = (3, 1, 4, 2)$$

dir. ▲

Önerme 5.2.32 *Simetrik grupta iki devirin eşlenik olması için gerek ve yeter şart aynı devir tipine sahip olmalarıdır.*

Örnek 5.2.33 S_5 de $(1, 2, 3)(4, 5)$ ile $(1, 4, 5)(2, 3)$ permütasyonları devir tipleri aynı olduğundan eşleniktirler. Fakat $(1, 2, 3)$ ile $(4, 5)$ permütasyonları eşlenik değildir. ▲

Tanım 5.2.34 *$n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r$ ve $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ koşullarını sağlayan $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ doğal sayılar dizisine n nin bir* **ayrışımı (parçalanması)** *denir ve n nin tüm ayrışımlarının sayısı $p(n)$ ile gösterilir.*

Örnek 5.2.35 2 nin tüm ayrışımları (2) ve (1,1) olduğundan $p(2) = 2$, 3 ün tüm ayrışımları (3) , (2,1) ve (1,1,1) olduğundan $p(3) = 3$ dür. 4 ün tüm ayrışımları (4), (3,1), (2,2), (2,1,1), (1,1,1,1) olduğundan $p(4) = 5$ dir. 5 in tüm ayrışımları (5), (4,1), (3,2), (3,1,1), (2,2,1), (2,1,1,1), (1,1,1,1,1) olup $p(5) = 7$ dir. ▲

Uyarı 5.2.36 S_n simetrik grubunun eşlenik sınıflarını belirlemek için aşağıdaki yol izlenir:

(1) n nin ayrışımları belirlenir.

(2) Bu ayrışımlara karşılık gelen temsilci permütasyonlar bulunur.

(3) Herbir eşlenik sınıfında temsilci eleman ile aynı devir tipine sahip elemanlar yer alır.

♦