A. Ü. FEN FAKÜLTESİ MATEMATİK BÖLÜMÜ
MAT301 ARASINAV SORULARI ve ÇÖZÜMLERİ

1. $M_2(\mathbb{Z}_6)$ grubunun $\begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{4} \end{pmatrix}$ elemanı tarafından üretilen altgrubunu bulunuz.

   ÇÖZÜM : $\left\langle \begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{4} \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ n \begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{4} \end{pmatrix} \;:\; n \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{4} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{2} \end{pmatrix} \right\}$ şeklindedir.

2. $G = A_4$ alterne grubunun $H = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ altgrubu veriliyor. H nın G içindeki tüm sol kosetlerini bulunuz.

   ÇÖZÜM : $A_4 = \{(1), (124), (142), (12)(34), (123), (143), (234), (13)(24), (132), (134), (243), (14)(23)\}$ olduğundan H nın G içindeki tüm sol kosetleri

$$\begin{aligned} (1)H &= \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \\ (123)H &= \{(123), (134), (243), (142)\} \\ (132)H &= \{(132), (234), (124), (143)\} \end{aligned}$$

   şeklindedir.

3. G bir grup olmak üzere $f : G \to G$, $f(a) = a^{-1}$ şeklinde tanımlı f fonksiyonu bir grup izomorfizması mıdır? Araştırınız.

   ÇÖZÜM : Öncelikle f nin bir grup homomorfizması olup olmadığını kontrol edelim. $a, b \in G$ için $f(ab) = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = f(b)f(a)$ dır. G grubu değişmeli olmadığından $f(b)f(a) = f(a)f(b)$ eşitliği her zaman sağlanmaz. Bu sebeple f fonksiyonu bir grup izomorfizması değildir.

4. $U(13)$ çarpımsal grubunun bütün altgruplarını bulunuz.

   ÇÖZÜM : $U(13) = \{\overline{a} \in \mathbb{Z}_{13} \mid (a, 13) = 1\} = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}\}$ grubunun bütün altgruplarını bulalım.

$$\begin{array}{lll} \overline{2}^1 = \overline{2}, & \overline{2}^7 & = \overline{11}, \\ \overline{2}^2 = \overline{4}, & \overline{2}^8 & = \overline{9}, \\ \overline{2}^3 = \overline{8}, & \overline{2}^9 & = \overline{5}, \\ \overline{2}^4 = \overline{3}, & \overline{2}^{10} & = \overline{10}, \\ \overline{2}^5 = \overline{6}, & \overline{2}^{11} & = \overline{7} \\ \overline{2}^6 = \overline{12}, & \overline{2}^{12} & = \overline{1} \end{array}$$

   olduğundan $\overline{2}$, $U(13)$ grubunun bir üretecidir. Bu sebeple $U(13)$ grubu devirlidir.

   $d \mid 12$ olmak üzere, $\langle \overline{2}^d \rangle \leq U(13)$ dir. Yani $U(13)$ grubunun bütün altgrupları

$$\langle \overline{2}^1 \rangle, \ \langle \overline{2}^2 \rangle, \ \langle \overline{2}^3 \rangle, \ \langle \overline{2}^4 \rangle, \ \langle \overline{2}^6 \rangle, \ \langle \overline{2}^{12} \rangle$$

   şeklindedir.