Bölüm 11

p-Gruplar ve Sylow Teoremleri

Bu bölümde p bir asal sayı olmak üzere p-grup, p-altgrup ve Sylow p-altgrup kavramları incelenecektir. Verilen herhangi bir grubun Sylow p-altgrupları yardımıyla ayrışımlarının elde edilmesi üzerinde durulacaktır. Ayrıca "Sylow Teoremleri" olarak bilinen ve sonlu gruplar için büyük bir öneme sahip teoremler verilecektir.

11.1 p-Gruplar

Bu kısımda bir p asal sayısı için p-grup, p-altgrup ve Sylow p-altgrup kavramları tanımlanacaktır.

Tanım 11.1.1 *G bir grup ve p bir asal sayı olsun. Eğer G grubunun her elemanının mertebesi p nin bir kuvveti olarak yazılabiliyorsa G ye bir* **p-grup** *adı verilir.*

Örnek 11.1.2

$$Q_8 = \{-1, 1, -i, i, -j, j, -k, k\}$$

kuaterniyonlar grubunu göz önüne alalım. Q_8 grubunun elemanlarının mertebeleri $o(1) = 1 = 2^0$, $o(-1) = 2 = 2^1$, $o(-i) = o(i) = 4 = 2^2$; $o(j) = o(-j) = 4 = 2^2$; $o(-k) = o(k) = 4 = 2^2$ olduğundan Q_8 bir 2-gruptur. ▲

Örnek 11.1.3 p bir asal sayı olmak üzere $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ bölüm grubunun

$$H = \left\{ \frac{a}{p^i} + \mathbb{Z} : a \in \mathbb{Z},\ i \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

altgrubu bir sonsuz p-gruptur. ▲

Örnek 11.1.4 $G = \mathbb{Z}_6$ grubunun elemanlarının mertebeleri bir p asal sayısının kuvveti olmadığından bir p-grup değildir. ▲

Her grup p-grup olmak zorunda değildir, fakat p-grup olan altgrupları mevcut olabilir. Şimdi bu durumu inceleyelim.

Tanım 11.1.5 *G sonlu değişmeli bir grup, p bir asal sayı ve $p \mid |G|$ olsun. Bu durumda*

$$G_p = \{x \in G : o(x) = p^r \text{ olacak biçimde } r \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \text{ vardır}\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Teorem 11.1.6 *G sonlu değişmeli bir grup, p bir asal sayı ve $p \mid |G|$ olsun. Bu durumda G_p kümesi G nin bir altgrubudur.*

Uyarı 11.1.7 Her grup bir p-grup olmak zorunda değildir. Eğer G sonlu değişmeli bir grup, p bir asal sayı ve $p \mid |G|$ ise o zaman G nin en geniş p-altgrubu G_p dir. ♦

Örnek 11.1.8 $G = \mathbb{Z}_6$ grubunu göz önüne alalım. $|\mathbb{Z}_6| = 6 = 2 \cdot 3$ olup $|\mathbb{Z}_6|$ bir p asal sayısının kuvveti olmadığından $\mathbb{Z}_6$ grubu bir p-grup değildir. Diğer taraftan $2 \mid |\mathbb{Z}_6|$ olduğundan $G = \mathbb{Z}_6$ nın bir 2-altgrubu G_2 ve $3 \mid |\mathbb{Z}_6|$ olduğundan $\mathbb{Z}_6$ nın bir 3-altgrubu G_3 vardır. Bu altgruplar

$$\begin{aligned} G_2 &= \{\overline{x} \in G : o(\overline{x}) = 2^r \text{ olacak biçimde } r \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \text{ vardır}\} \\ &= \{\overline{0}, \overline{3}\} \\ &= \langle \overline{3} \rangle \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} G_3 &= \{\overline{x} \in G : o(\overline{x}) = 3^r \text{ olacak biçimde } r \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \text{ vardır}\} \\ &= \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} \\ &= \langle \overline{2} \rangle \end{aligned}$$

şeklindedir. ▲

Uyarı 11.1.9 G sonlu bir grup, p bir asal sayı, $m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $p^m \mid |G|$ ve $p^{m+1} \nmid |G|$ olsun. Bu durumda G grubunun mertebesi p^m olan bir altgrubu vardır. ♦

Tanım 11.1.10 *G sonlu bir grup, p bir asal sayı, $m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $p^m \mid |G|$ ve $p^{m+1} \nmid |G|$ olsun. Bu durumda G grubunun mertebesi p^m olan altgrubuna* **Sylow *p*-altgrubu** *adı verilir.*

Örnek 11.1.11 S_3 simetrik grubunun Sylow p-altgruplarını belirleyelim. $|S_3| = 6 = 2 \cdot 3$ olduğundan S_3 grubunun Sylow 2-altgrupları ile Sylow 3-altgrupları vardır. $2^1 \mid 6$ ve $2^2 \nmid 6$

olduğundan S_3 grubunun Sylow 2-altgrubunun mertebesi 2 dir. Mertebesi asal olan her grup devirli olduğundan S_3 grubunun Sylow 2-altgrupları

$$\begin{array}{lllll} H_1 & = & \langle(1,2)\rangle & = & \{(1),(1,2)\} \\ H_2 & = & \langle(1,3)\rangle & = & \{(1),(1,3)\} \\ H_3 & = & \langle(2,3)\rangle & = & \{(1),(2,3)\} \end{array}$$

şeklindedir. Benzer şekilde $3^1 \mid 6$ ve $3^2 \nmid 6$ olduğundan S_3 grubunun Sylow 3-altgrubunun mertebesi 3 tür. 3 asal olduğundan S_3 grubunun Sylow 3-altgrubu devirli olacaktır ve bu altgrup

$$H_4 = \{(1),(1,2,3),(1,3,2)\} = \langle(1,2,3)\rangle = \langle(1,3,2)\rangle = A_3$$

şeklindedir. ▲

Örnek 11.1.12 $G = \mathbb{Z}_6$ grubunun $G_2 = \{\overline{0},\overline{3}\}$ altgrubu için $2 \mid |G|$ ve $2^2 \nmid |G|$, diğer taraftan $G_3 = \{\overline{0},\overline{2},\overline{4}\}$ altgrubu için de $3 \mid |G|$ ve $3^2 \nmid |G|$ olduğundan G_2 ile G_3 altgrupları G nin sırasıyla Sylow 2 ve Sylow 3-altgruplarıdır. ▲

11.2 Sylow Teoremleri

Bu kısımda Sylow Teoremleri verilip bu teoremlerin kullanıldığı bazı uygulamalar yapılacaktır.

Tanım 11.2.1 *G bir grup ve $H \leq G$ olsun. $g \in G$ için $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} : h \in H\}$ kümesi G grubunun bir altgrubudur. gHg^{-1} altgrubuna* **H altgrubunun g ile eşleniği** *adı verilir.*

Uyarı 11.2.2 H bir G grubunun Sylow p-altgrubu ise $g \in G$ için gHg^{-1} de G nin bir Sylow p-altgrubudur ve $|H| = |gHg^{-1}|$ dir (Sonsuz grup durumunda kardinaliteler eşittir). ♦

Teorem 11.2.3 (Sylow Teoremleri) *G sonlu bir grup ve p bir asal sayı olsun. Bu durumda*

(i) *Eğer $p^m \mid |G|$ ve $p^{m+1} \nmid |G|$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{Z}^+$ varsa bu durumda G grubu mertebesi p^m olan bir altgruba sahiptir ve bu altgruba* **Sylow p-altgrubu** *adı verilir.*

(ii) *Aynı p asal sayısı için G nin herhangi iki Sylow p-altgrubu eşleniktir, yani P_1 ve P_2; G nin iki Sylow p-altgrubu ise o zaman $P_2 = gP_1g^{-1}$ olacak şekilde bir $g \in G$ vardır.*

(iii) *G grubunun farklı Sylow p-altgruplarının sayısı n_p ile gösterilmek üzere eğer $p \mid |G|$ ise o zaman $n_p \mid |G|$ ve $n_p \equiv 1 \pmod{p}$ dir.*

Uyarı 11.2.4 G bir grup olmak üzere G nin bir tek Sylow p-altgrubu P ise o zaman Teorem 11.2.3 (ii) gereğince $g \in G$ için gPg^{-1} de G nin bir Sylow p-altgrubudur ve $|P| = |gPg^{-1}|$ dir. P, G nin tek Sylow p-altgrubu olduğundan her $g \in G$ için $gPg^{-1} = P$ olmalıdır. Bu durumda $P \trianglelefteq G$ dir. ♦

Tanım 11.2.5 *Bir G grubunun $\{e\}$ ve kendisinden başka normal altgrubu yoksa o zaman G grubuna bir* **basit grup** *adı verilir.*

Örnek 11.2.6 Sylow Teoremleri yardımıyla mertebesi 20 olan bir G grubunun basit olmadığını gösterelim. $|G| = 20 = 2^2 \cdot 5$ şeklinde asal çarpanlarına ayrıldığından G grubunun Sylow 2 ve Sylow 5-altgrupları vardır. G grubunun farklı Sylow 2-altgruplarının sayısı n_2 olmak üzere Sylow Teoremleri (iii) gereğince $n_2 \mid 20$ ve $n_2 \equiv 1 \pmod 2$ dir. Buradan $n_2 = 1, 2, 4, 5, 10, 20$ ve $n_2 = 1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$ olup $n_2 = 1$ veya 5 tir. Diğer yandan G grubunun farklı Sylow 5-altgruplarının sayısı n_5 ile gösterilmek üzere Sylow Teoremleri (iii) gereğince $n_5 \mid 20$ ve $n_5 \equiv 1 \pmod 5$ tir. Buradan $n_5 = 1, 2, 4, 5, 10, 20$ ve $n_5 = 1, 6, 11, 16, 21, \dots$ olup $n_5 = 1$ bulunur. Bu durumda G grubunun bir tek Sylow 5-altgrubu vardır. Bu altgrubu P ile gösterelim. O halde $P \lhd G$ dir. Ayrıca $5^m \mid |G|$ ve $5^{m+1} \nmid |G|$ şartını sağlayan $m = 1$ olduğundan $|P| = 5$ tir. Dolayısıyla $P \neq \{e\}$ ve $P \neq G$ dir. Böylece G bir basit grup değildir. ▲

Örnek 11.2.7 Mertebesi 28 olan bir G grubunun mertebesi 7 olan bir normal altgrubunun var olup olmadığını araştıralım. $|G| = 28 = 2^2 \cdot 7$ şeklinde asal çarpanlarına ayrıldığından G grubunun Sylow 2 ve Sylow 7-altgrupları vardır. G nin farklı Sylow 7-altgruplarının sayısı n_7 olmak üzere $n_7 \mid 28$ ve $n_7 \equiv 1 \pmod 7$ dir. Bu sebeple $n_7 = 1, 2, 4, 7, 14, 28$ ve $n_7 = 1, 8, 15, 22, 29, \dots$ olup $n_7 = 1$ bulunur. Dolayısıyla G nin bir tek Sylow 7-altgrubu vardır. Bu altgrubu P ile gösterirsek bu durumda $P \lhd G$ olur. Diğer taraftan $7^m \mid |G|$ ve $7^{m+1} \nmid |G|$ olacak şekilde $m = 1$ olduğundan $|P| = 7$ dir. ▲