0. BÖLÜM: SAYI SİSTEMLERİ

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

denklemi matematiğin dört farklı alanından beş farklı sabiti içerir:

$(0{,}1)$ aritmetik

i cebir

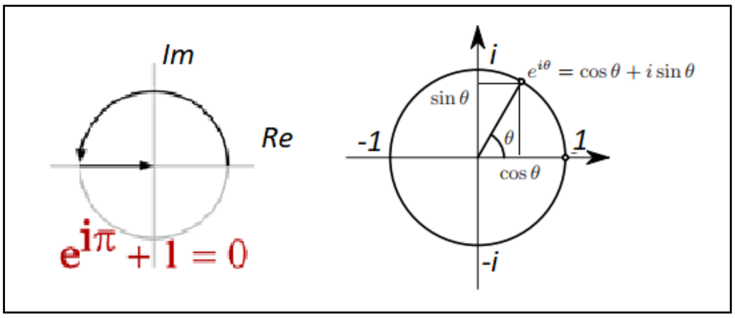
π geometri $\pi = 3{,}14159 \ldots$

e analiz $e = 2{,}71828 \ldots$

Bu sabitler, toplama, çıkartma ve kuvvet alma işlemleriyle ilişkilendirilmişlerdir. Bu denklem, 1740'ta Leonhard Euler tarafından keşfedilen Euler formülünün bir sonucudur. Euler formülü

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

ile verilir. Bu formülde $\theta = \pi$ alınırsa, $e^{i\pi} + 1 = 0$ denklemi elde edilir.



Kompleks sayıları içeren formüllerin çoğu Euler formülüne dayanır. Bu formülü kurabilmek için öncelikle sayı sistemini ele alalım.

0.1 Sayı Sistemleri

0.1.1 Tamsayıların toplanması ve çarpılması

Pozitif tamsayıları, $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ve sıfırı, artan sırada aşağıdaki gibi yazalım:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Bu sayı kümesi doğal sayı kümesi olarak ta adlandırılır ve $\mathbb{N}$ ile gösterilir. Eğer belirli bir a sayısından başlayıp, birer arttırarak b kere sağa sayılırsa, $a + b$ sayısına ulaşılır. Bu da tamsayıların toplamını verir.

Toplama tanımlandıktan sonra, çarpma da tanımlanabilir. Sıfırdan başlanıp, ona a, b kere eklenirse tamsayıların çarpımı tanımlanmış olur: b kere a. Bu tanımların bir sonucu olarak, bu işlemlerin sağladığı basit bazı (cebirsel) kurallar vardır:

$a + b = b + a$ toplamanın değişme özelliği

$a + (b + c) = (a + b) + c$ toplamanın birleşme özelliği

$ab = ba$ çarpmanın değişme özelliği

$(ab)c = a(bc)$ çarpmanın birleşme özelliği

$a(b + c) = ab + ac$ dağılma özelliği

Bu kurallar temel cebri karakterize eder (belirler).

Tamsayılar içinde 0 ve 1 özel özelliklere sahiptirler:

$$a + 0 = \mathrm{a}$$

$$a.1 = \mathrm{a}$$

Sonuç olarak, 0 toplamanın birim elemanı ve 1 ise çarpmanın birim elemanıdır. Dahası,

$$0.a = 0$$

ve eğer $a.b = 0$ ise ya a ya da b sıfırdır.

Şimdi ardışık çarpımları düşünelim. 1 ile başlanıp, 1, a ile b kere ard arda çarpılırsa, a'nın b. kuvveti elde edilir. Kuvvet (üs) alma işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$(ab)^c = a^c b^c$$

$$a^b a^c = a^{b+c}$$

$$(a^b)^c = a^{bc}$$

0.1.2 Ters işlemler

Toplama, çarpma, üs alma (kuvvet) gibi işlemlere ek olarak ters işlemler de vardır. a ve c'nin verildiğini varsayalım ve aşağıdaki denklemleri sağlayan b değerini bulmaya çalışalım:

- Eğer, $a + b = \mathrm{c}$ ise $b = \mathrm{c} - \mathrm{a}$ olarak tanımlanır ve bu işlem çıkartma işlemi olarak tanımlanır.
- Eğer, $ab = c$ ise $b = \frac{c}{a}$ bölme olarak tanımlanır.
- Eğer, $b^a = c$ ise $b = \sqrt[a]{c}$ yani c'nin a. kökü olarak tanımlanır.

0.1.3 Negatif sayılar

Şimdiye kadar, pozitif tamsayılar için toplama ve çarpmanın orijinal tanımları elde edildi. Bu cebirsel kuralların genel olarak sayıların daha geniş bir kısmı için geçerli olduğunu varsayalım. Bu sayılar, negatif tam sayılar olarak adlandırılır ve negatif tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, \dots\}$ ile gösterilir. Ancak unutmamak gerekir ki, bu sembollerin anlamları farklıdır.

Buradan negatif a kere negatif b, pozitif ab'ye eşittir:

$$(-a)(-b) = ab$$

Genel olarak,

$$a^{n-m} = \frac{a^n}{a^m}$$

eşitliği yazılır. $n = m$ ise, $a^0 = 1$'dir.

Eğer sayı sistemi sadece negatif ve pozitif tamsayıları içerirse $1/a^2$ anlamsız bir semboldür. Çünkü, a pozitif ya da negatif bir tamsayıdır ve karesi birden büyüktür. 1'in 1'den daha büyük bir tamsayıya bölümünün ne olduğu bilinmediğinden bu da çözülemeyen bir problemdir. Bu da, sayı sistemini genelleştirme işlemine devam etmeyi gerektirir.

0.1.4 Kesirli (oranlı, rasyonel) sayılar

Kesirli sayı a/b olarak tanımlanır. Burada, a ve b tamsayıdırlar ve $b \neq 0$'dır. Kesirli sayıların toplamı ve çarpımına bakalım. Örneğin, $A = \frac{a}{b}$ ve $B = \frac{c}{b}$ ise $b\,A = a$ ve $b\,B = c$, böylece $b(A + B) = a + c$ ve $(A + B) = \frac{a+c}{b}$'dir. Sonuç olarak,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$$

şeklindedir. Benzer olarak kesirli sayılar ile çarpma işlemi de aşağıdaki gibidir:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

Kesirli sayılar da toplamaya ve çarpmaya göre sıra değişme, birleşme ve dağılma özelliklerini sağlarlar. Çarpmaya göre sıra değişme bağıntısına bakalım:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \qquad \frac{c}{d} \times \frac{a}{b} = \frac{ca}{db}$$

Burada, a, b, c, d tamsayı olduklarından $ac = ca$ ve $bd = db$'dir. Böylece,

$$\frac{ac}{bd} = \frac{ca}{db}$$

ve

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$$

eşitliği vardır.

Tüm cebirsel kurallar pozitif ve negatif tamsayılar hatta kesirler için de geçerlidir. Tarihsel olarak, pozitif ve negatif tamsayılar ve onların kesirleri ile birlikte rasyonel sayılar olarak adlandırılırlar:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b};\ a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$$

0.1.5 İrrasyonel sayılar

İrrasyonel sayıların varlığı, ilk olarak karenin köşegen uzunluğu bulunurken ortaya atılmıştır. Eğer birim karenin köşegenin uzunluğu x ise Pisagor teoreminden, $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ elde edilir. Buradan, $x = \sqrt{2}$ bulunur. Ancak, $\sqrt{2}$ rasyonel bir sayı yani kesir olamaz. Bu durum, Yunanlıları sadece felsefik nedenler yüzünden değil aynı zamanda matematiksel olarak da şaşırtmıştır.

İki kesir arasına, ne kadar yakın olurlarsa olsunlar, bir diğeri sıkıştırılabilir. Örneğin;

$$\frac{1}{100} = \frac{2}{200} > \frac{2}{201} > \frac{2}{201} = \frac{1}{101}$$

Böylece, $\frac{1}{100}$ ve $\frac{1}{101}$ arasında $\frac{2}{201}$ vardır ve $\frac{2}{201}$ arasına $\frac{4}{401}$ sıkıştırılabilir:

$$\frac{1}{100} = \frac{4}{400} > \frac{4}{401} > \frac{4}{402} = \frac{2}{201}$$

Bu süreç sonsuza kadar gidebilir. Ancak, irrasyonel sayıların keşfi ile yoğunluklarına rağmen rasyonel sayıların sayı çizisi üzerinde boşluklar bıraktığı fark edilmiştir. İrrasyonel sayılar ile ilgili tatmin edici teori, 1872'de Richard Dedekind (1831-1916) tarafından verilmiştir. Reel (gerçel, gerçek) sayılar kümesini sürekli hale getirmek yani sayı çizgisi üzerindeki rasyonel sayılardan kalan boşlukları doldurmak için irrasyonel sayılara ihtiyaç duyulur. Reel sayılar rasyonel ve irrasyonel sayılardan oluşur ve $\mathbb{R}$ ile gösterilir. Bir reel sayı ondalık sayı olarak yazılabilen bir sayıdır. Üç çeşit ondalık sayı vardır: sonlu, sonlu olmayan fakat tekrarlı (devirli), sonlu olmayan ve tekrarlı olmayan. İlk iki tip rasyonel sayı olarak adlandırılır: $\frac{1}{4} = 0{,}25$, $\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$ Üçüncüsü irrasyonel sayıyı tanımlar: $\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$. Pratik bakış açısından, irrasyonel sayıyı bitmeyen ondalık sayı kesilerek yaklaşık olarak kullanılır. Eğer yüksek doğruluğa ihtiyaç var ise, daha çok ondalık sayı alınır.

0.1.6 Kompleks (Sanal) sayılar

Genelleştirme işlemine devam edelim. Başka çözülemeyen denklemler var mıdır? Evet vardır. Örneğin, $x^2 = -1$ denklemi şu ana kadar bilinen sayılar cinsinden çözülemez. Rasyonel sayının, irrasyonel sayının ve diğer sayıların hiçbirinin karesi -1'e eşit değildir. Bu yüzden, hala sayıları (sayı sistemini) daha geniş bir sınıfa genişletmek gerekir. 18. yy da Alman matematikçi Carl Friedrich Gauss kompleks sayıları kullanarak reel sayı sisteminin bir genişletmesini sağlamıştır. Augustin Louis Cauchy'nin ise kompleks fonksiyonlar üzerine önemli çalışmaları vardır.

Şimdi sayı sistemini bu denklemin çözümünü içerecek şekilde genişletelim. Bu amaçla, $\sqrt{-1}$ için i sembolünü tanıtalım. Mühendisler, i yerine j sembolünü kullanırlar. i'nin tek özelliği $i^2 = -1$ eşitliğini sağlamasıdır. Özellikle, $x = -i$ de $x^2 = -1$ denklemini sağlar. i'nin işareti her yerde değiştirilerek yazılan denklemler de geçerlidir. Bu da kompleks eşlenik almak olarak adlandırılır.

Sayılar ile i ard arda eklenerek ya da i'ler ile çarpılarak yeni sayılar elde edilir. Böylece, $a + i\,b$ formunda sayılar elde edilir. Burada, a ve b'ler reel sayılardır. i sayısı, birim sanal (kompleks) sayıdır. En genel $a + i\,b$ sayısı kompleks sayı olarak adlandırılır.

Kaynaklar

1. J.W. Brown and R.V. Churchill, Complex Variables and Applications, Eighth Edition, McGraw-Hill, Boston, 2009.

2. K.T. Tang, Mathematical Methods for Engineers and Scientists 1, Springer-Verlag, Berlin, 2007.

3. D.G. Zill, P.D. Shanahan, Kompleks Analiz ve Uygulamaları, Nobel, Ankara, 2020.