1. BÖLÜM: KOMPLEKS SAYILAR

1.1 Kompleks Sayılar: ilk tanımlar

Kompleks sayılar z harfi ile gösterilir: z kompleks sayısı, iki reel x ve y sayıları cinsinden, $z = x + i\,y$ olarak yazılabilirler. Burada, i sayısı birim sanal (kompleks) sayıdır ve $i^2 = -1$ eşitliğini sağlar. x ve y reel sayıları sırasıyla kompleks sayının reel ve kompleks (sanal) kısımlarını gösterir:

$$x = \mathrm{Re}\, z, \qquad y = \mathrm{Im}\, z$$

$\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesini gösterir ve bu küme çarpma ve toplama işlemleriyle bir cisim yapısına sahiptir.

Tanım: (Toplama, çarpma) İki kompleks sayı toplanabilir ve çarpılabilir:

$$z_1 + z_2 \equiv (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 \equiv (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Tanım: (Eşitlik) z_1 ve z_2 ile verilen iki kompleks sayının eşitliği aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$z_1 = z_2 \;\Leftrightarrow \mathrm{Re}\, z_1 = \mathrm{Re}\, z_2, \quad \mathrm{Im}\, z_1 = \mathrm{Im}\, z_2$$

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \;\Leftrightarrow\; x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2$$

Tanım: (Kompleks eşlenik) Verilen $z = x + i\,y$ kompleks sayısının kompleks eşleniği z^* ya da $\bar{z}$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$z^* = \bar{z} \equiv x - iy$$

Kompleks eşlenik alma işlemi, her kompleks sayıyı kendi kompleks eşleniğine götürür: $* : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Bazı temel özellikleri aşağıdaki gibidir:

i. $\bar{\bar{z}} = (z^*)^* = z$
ii. $(\overline{z_1 + z_2}) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
iii. $(\overline{z_1 \cdot z_2}) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
iv. $(\overline{\frac{z_1}{z_2}}) = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \;\; z_2 \neq 0, \qquad \overline{z^{-1}} = \frac{1}{\bar{z}}$

Tanım: (Mutlak değer) Bir kompleks sayının $(z = x + i\,y)$ mutlak değeri (modülü, normu, boyu), $|z|$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$|z| \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$$

Mutlak değerin bazı özellikleri aşağıdaki gibidir:

i. $z = 0$ ancak ve ancak $|z| = 0$
ii. $|z| = |\bar{z}|$
iii. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
iv. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0$
v. $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$
vi. Üçgen eşitsizliği: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|$

Örnekler:

1. Aşağıdakileri $x + iy$ formunda ifade ediniz.

a) $(6 + 2i) - (1 + 3i) = 6 + 2i - 1 - 3i = (6 - 1) + i(2 - 3) = 5 - i$

b) $(2 - 3i)(1 + i) = 2 + 2i - 3i - 3(i)^2 = 2 - i + 3 = 5 - i$

c) $\left(\frac{1}{2-3i}\right)\left(\frac{1}{1+i}\right) = \left(\frac{2+3i}{2^2+(-3)^2}\right)\left(\frac{1-i}{1^2+1^2}\right) = \frac{2+3i-2i-3i^2}{(4+9)2} = \frac{5+i}{26} = \frac{5}{26} + \frac{i}{26}$

2. Aşağıdakileri doğrulayınız.

a) $\left(\sqrt{2} - i\right) - i\left(1 - \sqrt{2}i\right) = -2i$

$\left(\sqrt{2} - i\right) + \left(-i + \sqrt{2}(i)^2\right) = \sqrt{2} - i - i - \sqrt{2} = -2i$

b) $(2 - 3i)(-2 + i) = -1 + 8i$

$2(-2) + 2i + 6i - 3(i)^2 = -4 + 8i + 3 = -1 + 8i$

c) $\left|(4 - 3i)\overline{(-i)} + (-i)\overline{(4 - 3i)}\right| = 6$

$= |(4 - 3i)i - i(4 + 3i)|$

$= |(4i - 3(i)^2) - (4i + 3(i)^2)|$

$= |-3(-1) - 3(-1)|$

$= |6|$

Problemler:

1. Aşağıdaki kompleks sayıların reel ve kompleks kısımlarını bulunuz.

a) $z_1 = \frac{2-i}{2+i}$ b) $z^2 = (x+iy)^2$

2. Aşağıdaki sayıları $x + iy$ olarak yazınız, mutlak değerlerini (modüllerini) ve kompleks eşleniklerini bulunuz.

a) $z_1 = (4+3i)(2-5i)$ b) $z_2 = \frac{i+i}{2-3i}$

3. $z = 2 - i$ sayısının çarpmaya göre tersinin modülünü (mutlak değerini) bulunuz.

Kaynaklar

1. J.W. Brown and R.V. Churchill, Complex Variables and Applications, Eighth Edition, McGraw-Hill, Boston, 2009.

2. K.T. Tang, Mathematical Methods for Engineers and Scientists 1, Springer-Verlag, Berlin, 2007.

3. D.G. Zill, P.D. Shanahan, Kompleks Analiz ve Uygulamaları, Nobel, Ankara, 2020.