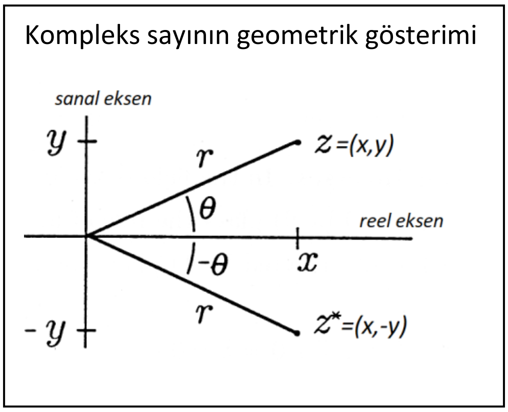
1. BÖLÜM: KOMPLEKS SAYILAR

1.2 Kompleks Sayının Kutupsal (Polar) Formu

Geometrik bakış açısı ile kompleks sayılar reel düzlemde ($\mathbb{R}^2$) noktalarla ifade edilirler:

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \leftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Bu durumda, x ekseni reel eksen, y ekseni kompleks (sanal) eksen olarak ve xy düzlemi de kompleks düzlem ya da z düzlemi olarak adlandırılır.



Orijinden z noktasına olan uzaklık $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ ile verilir. z sayısının kompleks eşleniği $\bar{z}$ (z^*), x eksenine göre simetriktir. Reel düzlemde x ve y koordinatları ile belirlenen (x, y) noktasının polar (kutupsal) koordinatları (r, θ)'dır.

r: (0,0) ve (x, y) noktaları arasındaki uzaklık

θ: yatay eksen (x) ve r arasındaki açıdır.

$r = |z|$ olmak üzere

$$x = r\cos\theta\,, \quad y = r\sin\theta \;\Rightarrow \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$z = x + iy = r\cos\theta + i\,r\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

θ, z'nin argümanıdır ve k keyfi bir tamsayı olmak üzere $\theta + 2\pi k$ aynı bir θ argümanını temsil eder. Bu da trigonometrik fonksiyonların periyodikliği ile ilişkilidir:

$$\cos(\theta + 2\pi k) = \cos\theta, \qquad \sin(\theta + 2\pi k) = \sin\theta, \;\; \forall k \in \mathbb{Z}$$

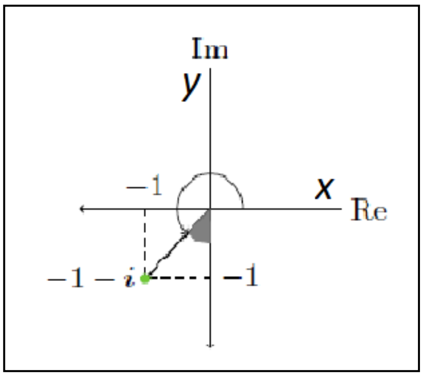
Böylece, θ argümanı 2π uzunluğundaki aralıkta tektir: $[0,2\pi), (-\pi,\pi]$. Bu durumda θ'ya esas argüman denir. Esas argüment ya da argüman $\operatorname{Arg} z = \arg_{(-\pi,\pi]} z$

$$\arg z = \arg_{(-\pi,\pi]} z + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ya da

$$\arg z = \operatorname{Arg} z + 2\pi k$$

Örnek: $z = -1 - i$ sayısının esas argümanı $-3\pi/4$'tür ve 3. bölgede yer alır.



$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-i)^2} = \sqrt{2} = r$$

$$z = x + iy, \quad x = -1, \;\; y = -1$$

$$x = r\cos\theta\,, \;\; y = r\sin\theta \;\Rightarrow \tan\theta = \frac{y}{x} = 1 \Rightarrow \operatorname{Arctan} 1 = \theta$$

Buradan,

$$\theta = \frac{5\pi}{4}, \quad \theta = -\frac{3\pi}{4}$$

Esas argüman, $(-\pi,\pi]$ aralığında tanımlı olduğundan z'nin esas argümanı $-\frac{3\pi}{4}$'tür: $\operatorname{Arg} z = -\frac{3\pi}{4}$.

$$\arg\,(-1,i) = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Ancak,

$$\arg z = \operatorname{Arg} z + 2\pi k$$

Eşitliğinin sağındaki $\operatorname{Arg} z$, $\arg z$'nin herhangi bir özel değeri ile yer değiştirebilir. Böylece,

$$\arg(-1, i) = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$$

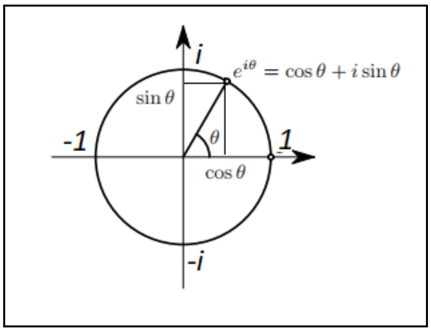
olarak yazılabilir.

Euler Formülü: $e^{i\theta}$ (exp $i\theta$) Euler formülü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Burada**,** θ radyan cinsinden ölçülür. Böylece kompleks sayı üstel formda daha kapalı bir şekilde yazılabilir:

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$



Moivre formülü: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad n \in \mathbb{Z}.$

Örnek: $z = -1 - i$ sayısını ekponensiyel formda yazınız.

$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} = r, \qquad (x = -1, \qquad y = -1, \qquad z = x + iy)$

$$\operatorname{Arg} z = -\frac{3\pi}{4} = \theta$$

$$z = re^{i\theta} = \sqrt{2}\, e^{-\frac{3\pi}{4}i}$$

Ancak bu sayıyı yazmanın sonsuz şekli vardır:

$$z = re^{i\theta} = \sqrt{2}\, e^{-\frac{3\pi}{4}i + 2\pi k i}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Not: $z = Re^{i\theta}$ merkezi orjinde, R yarıçaplı çemberin parametrik temsilidir. θ parametresi, 0'dan 2π'ye artarken, z noktası pozitif reel eksenden başlayıp saat ibrelerinin tersi yönde tüm çemberi dolaşır. Merkezi z_0'da olan çemberin parametrik gösterimi $z = z_0 + Re^{i\theta}$ şeklindedir.

1.2.1 Kutupsal formda kompleks sayıların çarpımı

$z_j = r_j e^{i\theta_j} = r_j\left(\cos\theta_j + i\sin\theta_j\right), \quad j = 1,2$ iki kompleks sayı olsunlar:

$$z_1.z_2 = r_1.r_2[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_2\sin\theta_1)]$$

$$z_1.z_2 = r_1.r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)] = r_1.r_2\ e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$z_1 = z_2 = z \ \Rightarrow\ z^2 = r^2(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta))$$

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)),\ \ n = 0,1,2,...$$

Diğer taraftan,

$$z^n = r^n(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$$

Bu iki eşitlik karşılaştırılırsa, Moivre formülü elde edilir:

$$(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n, \quad n = 0,1,2,...$$

Örnek: $\cos(3\theta)$'yı θ'nın fonksiyonu olarak ifade ediniz

$$\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3$$

$$= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i\ (3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)$$

Yukarıdaki eşitlikten,

$$\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$$

$$\sin(3\theta) = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$$

elde edilir.

Kompleks sayının bölümü:

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Kutupsal formda verilen z kompleks sayısının kompleks eşleniği,

$$z^* = \bar{z} = re^{-i\theta} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = r(\cos\theta - i\sin\theta)$$

ile verilir. $z \neq 0$ ise

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{z^*}{zz^*} = \frac{r(\cos\theta + i\sin\theta)}{r^2} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

Buradan,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)], \quad z_2 \neq 0$$

$$\frac{1}{z^n} = z^{-n} = \frac{1}{r^n}[\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)], \quad z \neq 0$$

elde edilir. Bu bağıntılar kolayca doğrulanabilir.

Problemler:

1. Aşağıdaki sayıları kutupsal formda yazınız.

a) $z = \frac{2i}{3+3i}$ b) $z = 1 + i\sqrt{3}$

2. Aşağıdaki denklemlerin köklerini bulunuz.

a) $z^4 + 1 = 0$ a) $z^2 = 1 - i$

Kaynaklar

1. J.W. Brown and R.V. Churchill, Complex Variables and Applications, Eighth Edition, McGraw-Hill, Boston, 2009.

2. K.T. Tang, Mathematical Methods for Engineers and Scientists 1, Springer-Verlag, Berlin, 2007.

3. D.G. Zill, P.D. Shanahan, Kompleks Analiz ve Uygulamaları, Nobel, Ankara, 2020.