1. BÖLÜM: KOMPLEKS SAYILAR

1.3 Kompleks Sayının n. Kökü

$z \neq 0 \in \mathbb{C}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, kompleks sayıları, ω sayısının n. kuvveti olarak yazalım:

$$z = \omega^n$$

Bu denklemim çözümü olan her ω kompleks sayısı z'nin köküdür. Bu denklemi çözmek için z ve ω sayılarını kompleks formda yazalım:

$$z = r_z e^{i\theta_z} = r_z(\cos\theta_z + i\sin\theta_z)$$

$$\omega = r_\omega e^{i\theta_\omega} = r_\omega(\cos\theta_\omega + i\sin\theta_\omega)$$

$$\omega^n = z$$

$$r_\omega^n(\cos n\theta_\omega + i\sin n\theta_\omega) = r_z(\cos\theta_z + i\sin\theta_z)$$

İki kompleks sayının eşitliğinden:

$$r_\omega^n = r_z \quad \Rightarrow \quad r_\omega = r_z^{1/n}$$

$$n\,\theta_\omega = \theta_z + 2\pi k \quad \Rightarrow \quad \theta_\omega = \frac{\theta_z}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ya da

$$\theta_\omega = \frac{\theta_z}{n} + \frac{2\pi k}{n} + 2\pi p$$

yazılabilir. $k \to (k + np)$ değişikliği yapılırsa $\frac{2\pi(k+np)}{n} = \frac{2\pi k}{n} + 2\pi p$ elde edilir. Böylece, k'nın $0,1,\dots,n-1$ arasında değişmesi yeterlidir. Çünkü, k'nın bunların herhangi bir değeri için θ_ω değerleri tekrarlanır. Açıların değerlerinin n tanesi farklıdır:

$$\theta_\omega = \frac{\theta_z}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$z = \omega^n$ denklemi, n tane çözüme sahiptir:

$$\omega_k = r_z^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta_z}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta_z}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right], \quad k = 0,1,\dots,n-1$$

Örnek: $z = -\sqrt{3} + i$'nin 5. köklerini bulunuz.

$$|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$$\tan\theta_z = \frac{y}{x} = \frac{1}{-\sqrt{3}} \;\; \Rightarrow \;\; \theta_z = \arctan(-\frac{1}{\sqrt{3}}) \;\; \Rightarrow \;\; \operatorname{Arg} z = \frac{5\pi}{6} = \theta_z$$

$z = \omega^5 \Rightarrow \omega = z^{1/5}$

$$\omega_k = |z|^{1/5}\left[\cos\left(\frac{\theta_z}{5} + \frac{2\pi k}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\theta_z}{5} + \frac{2\pi k}{5}\right)\right], \qquad k = 0,1,2,3,4$$

$$\omega_k = 2^{1/5}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{5}\right)\right]$$

$$\omega_0 = 2^{1/5}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$\omega_1 = 2^{1/5}\left[\cos\left(\frac{17\pi}{30}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{30}\right)\right]$$

$$\omega_2 = 2^{1/5}\left[\cos\left(\frac{29\pi}{30}\right) + i\sin\left(\frac{29\pi}{30}\right)\right]$$

$$\omega_3 = 2^{1/5}\left[\cos\left(\frac{41\pi}{30}\right) + i\sin\left(\frac{41\pi}{30}\right)\right]$$

$$\omega_4 = 2^{1/5}\left[\cos\left(\frac{53\pi}{30}\right) + i\sin\left(\frac{53\pi}{30}\right)\right]$$

$z \neq 0$ köklerinin modülleri $|z|^{1/5} = 2^{1/5}$'dir. Yani hepsi de $|z|^{1/5}$ yarıçaplı, merkezi orijinde olan çember üzerinde yer alırlar.

1.3.1 Birimin $\boldsymbol{n}$. küpü

$z = 1$ $(r_z = 1, \theta_z = 0)$'ın kökleri daha önce verilen formüllerden aşağıdaki gibidir:

$$\omega_k = \left[\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\right], \;\; k = 0,1,2,\dots,n-1$$

Moivre formülü göz önünde bulundurularak $\omega_k = \omega^k$ olduğu kolayca doğrulanır. Burada, $\omega = \omega_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ olarak tanımlıdır.

Örneğin, 1'in 8. kökleri

$$(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right))^k = \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^k}(1+i)^k, \quad k = 0,1,\dots,7$$

Açıkça,

$$1^{1/8} = \left\{1, \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), i, \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i), -1, -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), -i, \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\right\}$$

1.3.2 Kompleks sayının kökleri ve kuvvetleri

r pozitif bir reel sayı ve m, n doğal sayılar olmak üzere, $(r^m)^{1/n} = (r^{1/n})^m$ reel pozitif sayılar kümesindedir. Ancak, sıfırdan farklı pozitif bir kompleks sayı için n tane n. kök vardır ve böylece $z^{1/n}$ n tane kompleks sayının kümesidir. Eğer, m ve n asal sayılar iseler $(z^m)^{1/n} = (z^{1/n})^m$ $(z \neq 0)$ eşit kümeler oluştururlar. Eğer, m ve n asal sayı değil iseler $(z^m)^{1/n}$ ve $(z^{1/n})^m$ aynı küme değildirler.

Bunu görmek için $\boldsymbol{m = 4}$, $\boldsymbol{n = 2}$ durumunu ele alalım.

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$(\boldsymbol{z^{1/n}})^{\boldsymbol{m}}$ =?

$$\omega_k = r_z^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta_z}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta_z}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right], \qquad k = 0,1,2,\dots,n-1$$

$\boldsymbol{n = 2}$ için $\boldsymbol{k = 0, 1}$

$$\omega_0 = r^{1/2}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$\omega_1 = r^{1/2}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)\right] = -r^{1/2}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$z^{1/2} = (\pm 1)\, r^{1/2}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$z^{1/2} = \{\omega_0, \omega_1\}$ iki farklı sayıdır. $(z^{1/2})^4 =?$

$$(z^{1/2})^4 = (\pm 1)^4 r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$

tek bir kompleks sayıdır.

Şimdi, $(\boldsymbol{z^4})^{\mathbf{1/2}}$ =?'e bakalım.

$$z^4 = r^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta)$$

$(\boldsymbol{z^4})^{\mathbf{1/2}}, \boldsymbol{n = 2}, \ \boldsymbol{k = 0, 1}$

$$\omega_k = (r^4)^{1/2}\left[\cos\left(\frac{4\theta}{2} + \frac{2\pi k}{2}\right) + i \sin\left(\frac{4\theta}{2} + \frac{2\pi k}{2}\right)\right]$$

$$\omega_0 = r^2[\cos(2\theta) + i \sin(2\theta)\,]$$

$$\omega_1 = r^2[\cos(2\theta + \pi) + i \sin(2\theta + \pi)\,] = -r^2[\cos(2\theta) + i \sin(2\theta)\,]$$

$(z^4)^{1/2} = (\pm 1) r^2[\cos(2\theta) + i \sin(2\theta)\,]$ iki farklı kompleks sayıdır. $\left\{(z^4)^{1/2}\right\}$ sıfırdan farklı bir kompleks sayının kare köklerine karşı gelen iki sayıdan oluşan bir kümedir. $\left\{(z^{1/2})^4\right\}$, $\left\{(z^4)^{1/2}\right\}$'nin bir alt kümesidir.

Tanım: $z^{m/n}$ bulunurken aşağıdaki yol izlenir:

1) m/n en basit hale indirgenir.

2) Önce kök, sonra kuvvet hesaplanır.

$$z^{m/n} \equiv (z^{1/n})^m$$

$$z^{m/n} = (\sqrt[n]{r_z})^m[\cos\left(\frac{m}{n}\theta_z + \frac{2\pi k m}{n}\right) + i \sin\left(\frac{m}{n}\theta_z + \frac{2\pi k m}{n}\right)]$$

$$k = 0,1, \ldots, n-1$$

Problemler:

1. Aşağıdaki denklemlerin köklerini bulunuz.

a) $z^4 + 1 = 0$ a) $z^2 = 1 - i$

Kaynaklar

1. J.W. Brown and R.V. Churchill, Complex Variables and Applications, Eighth Edition, McGraw-Hill, Boston, 2009.

2. K.T. Tang, Mathematical Methods for Engineers and Scientists 1, Springer-Verlag, Berlin, 2007.

3. D.G. Zill, P.D. Shanahan, Kompleks Analiz ve Uygulamaları, Nobel, Ankara, 2020.