1. BÖLÜM: KOMPLEKS SAYILAR

1.4 Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar

D kompleks düzlemde bir bölge olsun. D üzerinde tanımlanmış bir f fonksiyonu, D'de bulunan her bir z kompleks sayısına bir $f(z)$ kompleks sayısı karşı getiren bir işlemdir (kuraldır):

$f: D \to \mathbb{C}$

$f: z \to f(z)$

Örneğin, $f(z) = \alpha_0 z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n$, $D \equiv \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı kompleks değerli bir fonksiyondur. Burada, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sabit kompleks sayılardır. Ancak,

$$f(z) = \frac{1}{\alpha_0 z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n}$$

fonksiyonu, paydayı sıfır yapan z değerlerinde tanımlı değildir. Yani tanımlı olduğu bölge $D \equiv \mathbb{C} - \{\text{paydanın kökleri}\}$.

Verilen her $z \in D$ için, $f(z) \in \mathbb{C}$ reel ve kompleks kısıma sahiptir: $f(z) = u(z) + iv(z)$. Burada, $u(z) = \mathrm{Re}(f(z))$ ve $v(z) = \mathrm{Im}(f(z))$ tüm $z \in D$'de tanımlıdır ve $u(z)$, $v(z) \in \mathbb{R}$'dir.

Daha önce, kompleks düzlemin (x, y) reel sayıları ile $z = x + iy$ kompleks sayısına karşı gelen, reel düzlem ile belirlenebildiğini gördük. Benzer olarak,

$$f(z) \equiv f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

olarak yazılabilir. $f(z)$'nin reel ve kompleks kısımları $\mathbb{R}$'dedir:

$u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x, y) \to u(x, y)$ $\qquad$ $(x, y) \to v(x, y)$

$u(x, y)$ ve $v(x, y)$ reel fonksiyonlardır.

Örnek: $f(z) = z^2$ kompleks değişkenli fonksiyonunun reel ve kompleks kısımlarını bulunuz.

$f(z)$ tüm $z \in \mathbb{C}$ için polinomdur. $z = x + iy$ gözönünde bulundurularak kompleks ve reel kısımlarına ayrılabilir:

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

$$f(z) = (x^2 - y^2) + i(2xy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$u(x,y) = x^2 - y^2, \quad v(x,y) = 2xy$$

olarak bulunur.

Örnek: $f(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ olsun. Tanım bölgesi, $\mathbb{C}$'dir.

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$u(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad v(x,y) = 0$$

Örnek: $f(z) = 1/z$ olsun.

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v(x,y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$f(z)$ orijin dışında tüm kompleks düzlemde tanımlıdır: $D = \mathbb{C} - \{0\} \equiv \mathbb{C}^*$.

Soru: $f(z) = |z| - iy$ 'nin reel ve kompleks kısımlarını bulunuz.

1.4.1 Kompleks değişkenli fonksiyonların grafik temsili

Tek değişkenli reel bir fonksiyon çifti, $(x, f(x))$, düzlemde temsil edebilir. Ancak kompleks değişkenli bir fonksiyon, $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, düzlemde temsil edilemez. $(z, f(z))$ çiftini temsil etmek için dört boyutlu uzaya ihtiyaç vardır. Bu problemi çözmek için, f fonksiyonunu $A \subset \mathbb{C}$ kümesini $f(A) \subset \mathbb{C}$ kümesine dönüştüren bir fonksiyon olarak düşünelim. Böylece, z noktalarının kümesi (A) alışık olunduğu gibi (Re(z) x ekseni, Im(z) y ekseni olacak şekilde) bir düzlemde ve bir diğer düzlemde de $f(A)$ noktaları gösterilebilir.

Örnek: $f(z) = z^2$ dönüşümünü ele alalım.

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

$$f(z) = (x^2 - y^2) + i(2xy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$u(x,y) = x^2 - y^2, \quad v(x,y) = 2xy$$

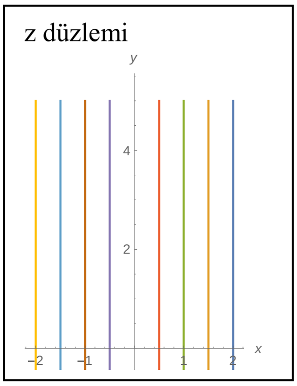
$x \neq 0$ olmak üzere $y = v/2x$ elde edilir. Bu da $\text{Re}(f(z))$'de yerine yazılırsa,

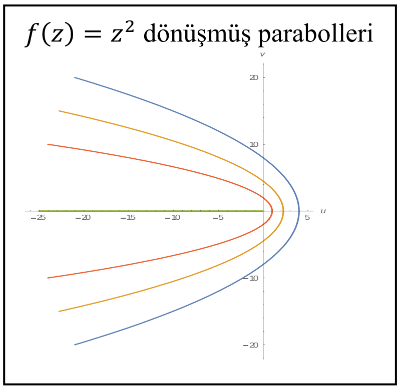
$$u = x^2 - v^2/4x^2$$

elde edilir. Böylece, her $x \neq 0$ için parabollerin bir ailesi bulunur:

$x = 0$ için $u = -y^2, v = 0$'dır.

$v = 2xy, \quad u = x^2 - v^2/4x^2$ için parametrik plot çizdirilir.





1.5 Cauchy-Riemann Denklemleri

Teorem: (Cauchy-Riemann denklemleri**)** $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ olsun ve $z_0 = x_0 + iy_0$ noktasında $f'(z)$ türevi mevcut olsun. Bu durumda, u ve v'nin (x_0, y_0)'da birinci mertebeden türevleri var olmalıdır ve Cauchy-Riemann denklemlerini sağlamalıdırlar:

$$u_x = v_y, \qquad v_x = -u_y$$

$f'(z_0) = u_x + iv_x$ olarak yazılabilir. Burada alt indisler türevi gösterirler ve türevler (x_0, y_0)'da hesaplanır.

Cauchy-Riemann denklemleri, Fransız matematikçi A.L. Cauchy (1789-1857) tarafından bulunmuş ve kullanılmıştır. Alman matematikçi G.F.B. Riemann (1826-1866) ise bu denklemleri kompleks değişkenli fonksiyonların teorisinin geliştirilmesinde temel olarak almıştır.

Örnek: $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$ her yerde türevlenebilirdir ve $f'(z) = 2z$'dir. Cauchy-Riemann denklemlerinin her yerde sağlandığını gösteriniz.

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

ve

$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

karşılaştırıldığında

$$u(x,y) = x^2 - y^2, \quad v(x,y) = 2xy$$

$$u_x = v_y \;\Rightarrow\; 2x = 2x$$

$$u_y = -v_x \;\Rightarrow\; -2y = -2y$$

Cauchy-Riemann denklemleri reel düzlemin tüm noktalarında sağlanır.

$$f'(z) = u_x + iv_x \;\Rightarrow\; f'(z) = 2x + i2y = 2(x+iy) = 2z$$

Herhangi bir $z = x + iy$ noktasında türev $f'(z) = 2z$'dir.

Problemler:

1. $f(z) = 8x^2 + i8y^2$ kompleks fonksiyonunu z cinsinden ifade ediniz.

2. $f(z) = z^2 + 4z\bar{z} - 5\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)$ fonksiyonunun $z = -1 + i$'deki değerini bulunuz.

3. $f(z) = z^2 + z + 1$ kompleks fonksiyonunu $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ formunda yazınız.

Kaynaklar

1. J.W. Brown and R.V. Churchill, Complex Variables and Applications, Eighth Edition, McGraw-Hill, Boston, 2009.

2. K.T. Tang, Mathematical Methods for Engineers and Scientists 1, Springer-Verlag, Berlin, 2007.

3. D.G. Zill, P.D. Shanahan, Kompleks Analiz ve Uygulamaları, Nobel, Ankara, 2020.