2. BÖLÜM: BAZI TEMEL FONKSİYONLAR

Bu bölümde tek kompleks değişkenli temel fonksiyonlar ele alınacak. Bu fonksiyonlar reel değişkenli fonksiyonlar ile aynıdır: polinomlar, üstel fonksiyonlar, trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonlar, logaritma ve kök.

2.1. Üstel Fonksiyonlar

Reel değişkenli üstel fonksiyon, türevinin kendisine eşit olması ile belirlenir (tanımlanır): $f'(x) = f(x)$. $f(0) = 1$ koşulu ile $f(x) = e^x$ tek çözümdür. Reel durum takip edilerek, kompleks değişkenli üstel fonksiyon da $f'(z) = f(z)$ koşulunu sağlayacak şekilde tanımlanabilir. Böylece, z reel olduğunda, $f(z) = e^x$ elde edilir.

Kompleks üstel formu bulmak için, reel üstel fonksiyon orijin yakınında Taylor serisine açılır:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafını kompleks duruma genişletelim. Bunun için, x yerine iy ($y \in \mathbb{R}$) yazalım:

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \cdots + \frac{(iy)^n}{n!} + \cdots$$

Reel ve kompleks kısımlar gruplandırılırsa,

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots\right) + (y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \cdots)$$

Kosinüs ve sinüs fonksiyonlarının seri açılımlarına karşı geldikleri görülür. Böylece,

$$e^{iy} \equiv \cos y + i \sin y$$

e^z'nin tanımı ($z = x + iy$ için), reel durumdaki $e^{x+y} = e^x e^y$ özelliği göz önünde bulundurularak,

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

olarak yapılır.

Tanım: $z = x + iy$ olsun. O zaman, z'nin üstel fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\exp z \equiv e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Açıkça, eğer z reel ise ($y = 0$ ise) tek değişkenli reel üstel fonksiyonun tanımı elde edilir. e^z'nin reel ve kompleks kısımları, sırasıyla $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ ile gösterilir. Aşağıdaki gibidir:

$$u(x, y) = e^x \cos y\,, \qquad v(x, y) = e^x \sin y$$

Her iki fonksiyonda, reel düzlemin tüm noktalarında türevlebilirdirler ve tüm noktalarda Cauchy-Riemann denklemlerini sağlarlar. e^x bir tam fonksiyondur.

$f(z) = e^z$'nin türevi de kendine eşittir: $f'(z) = f(z)$

$$\frac{d\,e^z}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$$

Üstel fonksiyonların bazı özellikleri:

i) $e^z \neq 0$, tüm $z \in \mathbb{C}$

$$|e^z|^2 = e^{2x} \;\Rightarrow\; |e^z| = e^x$$

Eğer, $e^z = 0 \Rightarrow |e^z| = e^x = 0$. Ancak, $e^x \neq 0$ her $x \in \mathbb{R}$ için, o zaman $e^z \neq 0$ her $z \in \mathbb{C}$.

2) e^z periyodiktir (tek değerli değildir):

$$e^{z+i2\pi} = e^z, \quad e^{i2\pi} = 1$$

Burada periyot, $i2\pi$'dir. Üstel fonksiyon bire bir değildir.

3) $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1 \Leftrightarrow z = \cos\theta + i\sin\theta \equiv e^{i\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}$

4) $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Bu özellik n kere uygulanırsa:

$$(e^z)^n = e^{nz}, \;\; \forall z_1, z_2 \in \mathbb{N}$$

5) $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}, \;\; \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$e^0 = 1$'dir ve $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.

6) $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}, \;\; \forall z \in \mathbb{C}$

7) Eğer, m ve n kendi aralarında asal iseler

$$(e^z)^{m/n} = e^{\frac{m}{n}(z+i2\pi k)}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{C}$$

8) Eğer, $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ $(e^x = \rho)$,

$$z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}, \qquad z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$$

olarak ifade edilebilir. Böylece,

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

Örnek: a) $\exp(z+i\pi) = -\exp z$ yani $e^{z+i\pi} = -e^z$ olduğunu gösteriniz.

$$e^{z+i\pi} = e^z\, e^{i\pi} = e^z(\cos\pi + i\sin\pi) = -e^z$$

b) $e^{2\pm i3\pi} = -e^2$ olduğunu gösteriniz.

$$e^{2\pm i3\pi} = e^2\, e^{\pm i3\pi} = e^2(\cos 3\pi \pm i\sin 3\pi) = -e^2$$

c) $\exp(\frac{2+i\pi}{4}) = \sqrt{\frac{e}{2}}(1+i)$ olduğunu gösteriniz.

$$e^{\frac{1}{2}+\frac{i\pi}{4}} = e^{\frac{1}{2}}e^{\frac{i\pi}{4}} = \sqrt{e}\left(\cos\frac{\pi}{4} \pm i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{e}{2}}(1+i)$$

2.2. Trigonometrik Fonksiyonlar

Reel keyfi bir x için,

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x, \qquad e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

elde edilir.

Şimdi kompleks sayılar için, trigonometrik fonksiyonları tanımlayalım. Öyle ki z reel olduğunda $(z = x)$ bilinen $\cos x$ ve $\sin x$ tanımlarını elde edelim ve, $\cos z$ ve $\sin z$'nin türevleri reel değişkenler için olduğu gibi $-\sin z$ ve $\cos z$ olsun.

Tanım: Kompleks bir sayının sinüsü ve kosinüsü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Bu şekilde tanımlanan fonksiyonlar tam fonksiyonlardır öyle ki $e^{\pm iz}$ tam fonksiyonlarının lineer bileşimidirler.

Kompleks değişkenli fonksiyonların türevleri (formal olarak):

$$\frac{d}{dz}\cos z = i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z$$

$$\frac{d}{dz}\sin z = i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 = 1$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \qquad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \qquad \operatorname{cosec} z = \frac{1}{\sin z}$$

Kompleks değişkenli trigonometrik fonksiyonların sağladığı bazı özellikler:

a)

$$\cos(\pi + z) = -\cos z$$

$$\sin(\pi + z) = -\sin z$$

$$\tan(\pi + z) = \tan z$$

$$\sin(2\pi + z) = \sin z$$

$$\cos(2\pi + z) = \sin z$$

b) $\cos z$'nin kompleks (sanal) ve reel kısımları:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^{y}}{2}$$

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$u(x,y) = \cos x \cosh y\,, \qquad v(x,y) = -\sin x \sinh y$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y}}{2i}$$

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

$$u(x,y) = \sin x \cosh y\,, \qquad v(x,y) = -\sin x \sinh y$$

c) $\cos z$'nin modülünü (mutlak değerini),

$$|\cos z|^2 = |\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y\,|^2 \quad = \sinh^2 y + \cos^2 x$$

ve $\sin z$

$$|\sin z|^2 = \sinh^2 y + \sin^2 x$$

olarak elde edilir.

$\cos z = \omega$ denklemi, belirlenmiş bir $\omega \in \mathbb{C}$ için her zaman çözüme sahiptir. Bu denklem, x ve y reel değişkenleri cinsinden iki denklem olarak yazılabilir:

$$\cos z = \omega = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$\mathrm{Re}\,\omega = \cos x \cosh y\,, \qquad \mathrm{Im}\omega = -\sin x \sinh y$$

Çözüm tek değildir, çünkü tüm tamsayı k'lar için $\cos(z + 2\pi k) = \omega$'dır. Benzer tartışma $\sin z$ için de yapılabilir. $\cos z$ ve $\sin z$ fonksiyonları $\mathbb{C}$'den $\mathbb{C}$'ye bir dönüşümdür, ancak 1-1 değildir.

Problemler:

1. $e^z = 1 + i\sqrt{3}$ denkleminden z'yi bulunuz.

2. $e^{2z-1} = 1$ denklemini çözünüz.

3. $\sin z = 0$ denklemini çözünüz.

Kaynaklar

1. J.W. Brown and R.V. Churchill, Complex Variables and Applications, Eighth Edition, McGraw-Hill, Boston, 2009.

2. K.T. Tang, Mathematical Methods for Engineers and Scientists 1, Springer-Verlag, Berlin, 2007.

3. D.G. Zill, P.D. Shanahan, Kompleks Analiz ve Uygulamaları, Nobel, Ankara, 2020.