2. BÖLÜM: BAZI TEMEL FONKSİYONLAR

2.3 Hiperbolik Fonksiyonlar

Kompleks değişkenlerde hiperbolik fonksiyonlar, reel fonksiyonunkilere benzer şekilde tanımlanır:

$$\cosh z \equiv \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \sinh z \equiv \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \tanh z \equiv \frac{\sinh z}{\cosh z}$$

$\cosh z$ ve $\sinh z$ aşağıdaki özelliklere sahiptir:

a) Tam fonksiyonların lineer birleşimi olduklarından tamdırlar. Türevleri reel değişkenlerde olduğu gibidir:

$$\frac{d}{dz}\cosh z = \sinh z, \quad \frac{d}{dz}\sinh z = \cosh z$$

b) Reel değişkenlerle aynı bağıntıları sağlarlar:

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

$$\cosh(z + 2n\pi) = \cosh z$$

$$\sinh(z + 2n\pi) = \sinh z$$

c) $\cosh z$’nin reel ve kompleks kısımlarını hesaplayalım.

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{e^x e^{iy} + e^{-x} e^{-iy}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} e^x(\cos y + i \sin y) + \frac{1}{2} e^x(\cos y - i \sin y)$$

$$= \cos y \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) + i \sin y \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$$

$$\cosh z = \cos y \cosh x + i \sin y \sinh x$$

$$u(x, y) = \cos y \cosh x\,, \qquad v(x, y) = \sin y \sinh x$$

Benzer olarak, $\sinh z$’nin de reel ve kompleks kısımları hesaplanır:

$$\sinh z = \cos y \sinh x + i \sin y \sinh x$$

$$u(x, y) = \cos y \cosh x\,, \qquad v(x, y) = \sin y \cosh x$$

d) $\sinh z$ ve $\cosh z$’nin modülleri:

$$|\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y$$

$$|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$$

e) $\cosh z$ ve $\sinh z$'nin sıfırları:

$$|\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sinh^2 x = 0 \ \Rightarrow x = 0$$

$$\cos^2 y = 0 \ \Rightarrow y = \pi \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$\cosh z$'nin sıfırları $z_n = 0 + i\pi \left(n + \frac{1}{2}\right)$ noktalarıdır. Burada, n'ler tamsayıdır. $\cosh z$'nin tüm sıfırları kompleks eksendedir. Benzer olarak, $\sinh z$ $z_n = i\pi n$ noktalarında sonsuz tane sıfıra sahiptir. Reel değişkende sadece $x = 0$'da sıfıra sahiptir.

Örnek: $\cosh z = 2i$ denklemini çözünüz.

$$\cosh z = \cos y \cosh x + i \sin y \sinh x = 2i$$

$$\Rightarrow \quad \cos y \cosh x = 0 \quad \Rightarrow \quad \cosh x \neq 0 \text{ ise } \cos y = 0 \text{ ve } y = \pi \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \sin y \sinh x = -2 \quad \Rightarrow \quad \sin(\pi \left(n + \frac{1}{2}\right)) \sinh x = -2$$

$$\Rightarrow (-1)^n \sinh x = -2$$

$$\sinh x = 2(-1)^{1-n}$$

$$\Rightarrow x = \text{Arcsinh } (2(-1)^{1-n})$$

$$z = x + iy = \text{Arcsinh } (2(-1)^{1-n}) + i\pi \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

2.4. Logaritmik Fonksiyonlar

r reel pozitif sayısının doğal logaritması reel bir sayıdır, öyle ki $e^{\ln r} = r$. Daha önceki kesimlerde olduğu gibi, burada da doğal logaritmayı kompleks düzleme genişletelim. $\omega \neq 0 \in \mathbb{C}$ için bir başka kompleks sayı $\log \omega$ vardır, öyle ki

$$e^{\log \omega} = \omega$$

Bağıntısını sağlar. ω'yı polar (kutupsal) formda yazalım:

$$e^{\log \omega} = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}$$

Burada, $\rho = |\omega|$ ve $\theta = \arg \omega$'dır. Bu iki kompleks sayı eşittir, ancak ve ancak modülleri eşit ve argümanları 2π'nin tamsayı katları kadar farklı ise:

$$\log \omega = Re(\log \omega) + i\,\mathrm{Im}(\log \omega)$$

$$e^{\log \omega} = e^{Re(\log \omega)} e^{i\,\mathrm{Im}(\log \omega)} = \rho e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow \rho = e^{Re(\log \omega)} \;\; \text{ve} \;\; \mathrm{Im}(\log \omega) = \theta + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Reel değişken için,

$$\rho = e^{Re(\log \omega)} \;\; \Rightarrow \;\; Re(\log \omega) = \ln \rho$$

$\ln \rho$, ρ pozitif sayısının doğal logaritmasıdır. Sonuç olarak,

$$\log \omega = \ln \rho + i(\theta + 2\pi n) = \ln|\omega| + i(\arg \omega + 2\pi n)$$

Sıfırdan farklı kompleks bir sayının logaritması, sadece bir kompleks sayı değil, kompleks sayıların bir sonsuz kümesidir. Hepsinin reel kısımları aynıdır, kompleks kısımları 2π kadar fark eder. $\log \omega$'yı temsil eden sonsuz kümenin tüm kompleks sayıları arasından $(\omega \neq 0)$ bir tane sayı seçilir ki, o istenilen fonksiyondur. Ancak, bu seçimi yapmak için bir kriter belirlemek gerekir.

Reel pozitif ω için, $\arg \omega = 0$'dır ve

$$\log \omega = \ln \omega + i2\pi n$$

n keyfi tamsayıdır. Ancak, reel pozitif ω sayısının doğal logaritması, $\log \omega$'nın mümkün değerlerinden biridir. Bu da, $n = 0$'a karşı gelir ve buna logaritmanın esas değeri denir ($\mathrm{Log}\, \omega$ ile gösterilir.).

$\omega \neq 0 \in \mathbb{C}$ için $e^{\log \omega} = \omega$ olsun. $\log e^z$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ifadesini bulalım:

$$\log e^z = \log e^x e^{iy} = \ln e^x + i(y + 2\pi n) = x + iy + i2\pi n$$

$$\log e^z = (x + iy) + i2\pi n = z + i2\pi n, \;\; n \in \mathbb{Z}$$

$n = 0 \Rightarrow \log e^z = z$'dir. Bu da reel duruma benzer: $\log e^x = x$'dir.

2.4.1 Logaritma fonksiyonunun özellikleri

a) $\ln r_1 r_2 = \ln r_1 + \ln r_2, \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$

b) $\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$

c) $\log \frac{z_1}{z_2} = \log z_1 - \log z_2, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$

d) Eğer $n, m \in \mathbb{N}$ kendi aralarında asal iseler,

$$z^{m/n} = \exp(\frac{m}{n}\log z)$$

bağıntısı vardır.

2.4.2 Kompleks üsler

$z \in \mathbb{C}^*$ ve α sabit bir kompleks sayı olmak üzere, $f(z) = z^{\alpha}$ fonksiyonu (çok değerli) logaritmik fonksiyon cinsinden tanımlanır:

$$z^{\alpha} \equiv e^{\alpha \log z}$$

Bu tanım, z^n ve $z^{1/n}$ için de geçerlidir.

Problemler:

1. $\operatorname{Log} z = u(x,y) + iv(x,y)$ ise, $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ ifadelerini bulunuz.

2. $(-i)^i$'nin esas değerini bulunuz.

Kaynaklar

1. J.W. Brown and R.V. Churchill, Complex Variables and Applications, Eighth Edition, McGraw-Hill, Boston, 2009.

2. K.T. Tang, Mathematical Methods for Engineers and Scientists 1, Springer-Verlag, Berlin, 2007.

3. D.G. Zill, P.D. Shanahan, Kompleks Analiz ve Uygulamaları, Nobel, Ankara, 2020.