3. BÖLÜM: KOMPLEKS DÜZLEMDE İNTEGRALLER

Kompleks değişkenli fonksiyonların integralleri oldukça önemlidir. Bu bölümde, kompleks düzlemdeki eğriler üzerinden kompleks değişkenli fonksiyonların integralleri ele alınacaktır.

3.1. Kompleks Değişkenli Fonksiyonun Belirli İntegrali

u ve v reel değişkenli fonksiyonlar olsunlar: $u, v: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. u ve v, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ aralığında süreklidirler yani $[a,b]$ aralığında integrallenebilirdirler. $[a,b]$ aralığında sürekli, reel değişkenli kompleks bir fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$f = u + iv: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında integrali

$$\int_a^b f(t)\,dt \equiv \int_a^b u(t)\;dt + i\int_a^b v(t)\;dt$$

olarak tanımlanır.

Bu integralin temel özellikleri aşağıdaki gibidir:

a) $\mathrm{Re}\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b u(t)\;dt = \int_a^b [\mathrm{Re}f(t)]\;dt$

$\mathrm{Im}\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b u(t)\;dt = \int_a^b [\mathrm{Im}f(t)]\;dt$

b) $\int_a^b \alpha f(t)\,dt = \alpha\int_a^b f(t)\,dt$

c) $c \in (a,b)$ olsun.

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$

İndüksiyon ile, eğer $a < c_1 < c_2 < \cdots < c_n < b$ ise

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^{c_1} f(t)\,dt + \int_{c_1}^{c_2} f(t)\,dt + \cdots + \int_{c_n}^b f(t)\,dt$$

d) $\int_a^b f(t)\,dt = 0 \;\Rightarrow\; \int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$

e) $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt$

f) Çizgisellik (lineerlik)

$f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $[a, b]$ aralığında sürekli (ya da parçalı sürekli) fonksiyonlar olmak üzere,

$$\int_a^b [\alpha f(t) + \beta g(t)]\, dt = \alpha \int_a^b f(t)\, dt + \beta \int_a^b g(t)\, dt, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

3.2. Konturlar

Kompleks değişkenli fonksiyonların integrali, $\mathbb{C}$'de özel tipte eğrisel integrale kısıtlanır. Yani, integraller sadece belli bir aralıktaki doğrular üzerinden değil, kompleks düzlemde eğriler üzerinden alınır. Bu eğriler, parçalı düzgün eğriler (Jordan eğrileri) ya da basitçe konturlar olarak adlandırılırlar. Konturlar kompleks düzlemde iki noktayı sürekli olarak birleştirirler. Ancak sonlu sayıda noktada teğetleri olmayabilir. $\gamma(t)$ eğrisi, $\mathbb{R}$ reel doğrusunun bir kapalı aralığından, kompleks düzleme sürekli bir gönderimdir:

$$\gamma(t): [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

γ'nın uç noktalardaki sürekliliği yanaldır, yani

$$\gamma(a) = \lim_{t \to a^+} \gamma(t), \qquad \gamma(b) = \lim_{t \to b^-} \gamma(t)$$

γ ile belirlenen eğri $\mathbb{C}$'de bir alt kümedir. Yani, kapalı bir aralığın gönderimi de kapalıdır. $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise, $\gamma(t)$ eğrisi basit kapalı bir eğri ya da Jordan eğrisi olarak adlandırılır. Eğer eğrinin yönelimi saat ibrelerine ters ise, pozitif yönelimlidir.

Örnek: Birim çember $z = e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ orijin etrafında basit kapalı bir eğridir ve saat ibreleriyle ters yönde yönlendirilmiştir.

$z = Re^{i\theta} + z_0$ ise merkezi z_0'da olan R yarıçaplı çembedir.

Aynı nokta kümesinden farklı bir yay da yapılabilir. $z = e^{-i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$, $z = e^{i\theta}$ ile belirlenen aynı yaydır, ancak bu sefer saat ibreleriyle aynı yönde yönlendirilmiştir.

3.3. Kompleks Düzlemde Eğrisel İntegraller

Kompleks düzlemde $\gamma(t)$ konturu üzerinden kompleks değişkenli bir fonksiyonun integrali aşağıdaki gibi tanımlıdır.

Tanım: f, $A \subset \mathbb{C}$ açık aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun ve $\gamma(t)\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, parçalı C^1 sınıfından bir eğri olsun. Burada, $\gamma([a,b]) \subset A$'dır. f'in γ boyunca integrali aşağıdaki ifade ile verilir:

$$\int_\gamma f \equiv \int_\gamma f(z)dz \equiv \sum_{k=0}^{n} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)dt \quad (*)$$

Burada $\gamma'(t)$, $\gamma(t)$'nin t'ye göre türevini gösterir. Her, (a_k, a_{k+1}) aralığında $f(\gamma(t))$ fonksiyonu süreklidir. Aynı zamanda (a_k, a_{k+1}) aralığında $f(\gamma(t))\gamma'(t)$'de süreklidir. Sonlu uç noktaları a_k ve a_{k+1} ile Riemann integrali

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)dt\,, \quad k = 0,1,\dots,n$$

vardır.

Yukarıda verilen notasyonu basitleştirmek için, $\gamma'(t)$'nin süreksizliklerini göz önüne almadan kapalı bir formda yazalım:

$$\int_\gamma f \equiv \int_\gamma f(z)dz \equiv \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)dt$$

$(*)$ integrali, $\mathbb{R}^2$'deki çizgi integraline benzer. $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ve $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ olsunlar. O zaman $z = x + iy$ ve $dz = dx + idy$

$$\int_\gamma f = \int_\gamma (u(x,y) + iv(x,y))(x'(t) + iy'(t))\,dt$$

$$= \int_\gamma [ux' - vy']\,dt + i\int_\gamma [uy' + vx']\,dt$$

$$= \int_\gamma [udx - vdy]\,dt + i\int_\gamma [udx + vdy]\,dt$$

3.3.1. Kontur (eğrisel) İntegrallerin Özellikleri

$\gamma(t)\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, parçalı C^1 sınıfından bir eğri ve $f, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonlar olsunlar.

a) Lineerlik: f ve g, $\gamma([a,b])$ üzerinde sürekli fonksiyonlar olsunlar. $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$\int_{\gamma} [\alpha f + \beta g] = \alpha \int_{\gamma} f + \beta \int_{\gamma} g$$

özelliği sağlanır.

b) Şimdi γ'nın tersi eğriyi (konturu) $-\gamma(t)$'yi düşünelim. $f,\ \gamma([a,b])$'de sürekli olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\int_{-\gamma} f = -\int_{\gamma} f$$

c) $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$ parçalı C^1 sınıfından iki eğri olsunlar. Öyle ki**,** $(\gamma_1(t) + \gamma_2(t))$ iyi tanımlı ve $f,\ (\gamma_1 + \gamma_2)([a,b])$'de sürekli olsun. Bu durumda,

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$$

vardır.

Problemler:

1. $I = \int_C \bar{z}\, dz$ integralinin değerini bulunuz. Burada, $z = 2e^{i\theta}$ $(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ ve C $|z| = 2$ çemberinin $z = -2i$'den $z = 2i$'ye sağ yarısıdır.

Kaynaklar

1. J.W. Brown and R.V. Churchill, Complex Variables and Applications, Eighth Edition, McGraw-Hill, Boston, 2009.

2. K.T. Tang, Mathematical Methods for Engineers and Scientists 1, Springer-Verlag, Berlin, 2007.

3. D.G. Zill, P.D. Shanahan, Kompleks Analiz ve Uygulamaları, Nobel, Ankara, 2020.