3. BÖLÜM: KOMPLEKS DÜZLEMDE İNTEGRALLER

3.4. Cauchy Teoremi

Cauchy teoremi, kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisinde temel bir sonuçtur. $\mathbb{R}^2$'de Green teoremi, çift katlı integral ile çizgi integrallerini ilişkilendirir. $P(x,y)$ ve $Q(x,y)$, γ pozitif yönlü, parçalı düzgün, $\mathbb{R}^2$'nin basit kapalı bir konturu içinde ve üzerinde C^1 sınıfından iki fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlik vardır:

$$\int_\gamma (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = \iint_A (Q_x - P_y)dxdy$$

Burada, A γ'nın sınırıdır.

Teorem: γ basit kapalı bir kontur olsun ve f'de γ'da ve γ'nın içinde türevi sürekli ve analitik bir fonksiyon olsun. O zaman

$$\int_\gamma f(z)dz = 0, \quad (\oint_\gamma f(z)dz = 0)$$

sağlanır.

İspat: $f = u + iv$ ve $dz = dx + idy$ olsun. Bu durumda,

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (udx - vdy) + i\int_\gamma (udy + vdx)$$

Her bir integralde Green teoremi kullanılırsa,

$$\int_\gamma f = \iint_A (-v_x - u_y)dxdy + i\iint_A (u_x - v_y)dxdy$$

ve Cauchy Riemann koşulları göz önünde bulundurulursa,

$$u_x = u_y, \quad u_y = -v_x$$

her iki integralde sıfır sonucunu verir.

Teorem: γ basit kapalı bir kontur olsun ve f'de γ'da ve γ'nın içinde analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda, γ kapalı konturu üzerinden f fonksiyonunun integrali sıfırdır:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0 \quad (\oint_{\gamma} f(z)dz = 0)$$

Sonuç: (Cauchy-Goursat teoreminin çoklu bağlantılı bölgeler için genelleştirilmesi)

γ basit kapalı bir kontur olsun ve $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ kendi aralarında kesişmeyen basit kapalı konturlar olsunlar. $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$'lerin hiç biri bir diğerinin içinde olmasın, sadece γ'nın içinde olsunlar. f fonksiyonu γ ve $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ arasındaki bölgede analitik ise

$$\int_{\gamma} f = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f$$

sağlanır.

Sonuç: γ_1 ve γ_2 pozitif yönlü, basit kapalı eğrileri (konturları) arasında kalan bölgede analitik olan bir $f(z)$ fonksiyonu olsun. Bu durumda,

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz$$

sağlanır.

Bu sonuç eğrilerin deformasyonunun temeli olarak bilinir. Sonuç olarak bu bölgedeki analitik fonksiyonun integrali gidilen yoldan bağımsızdır.

3.5 Cauchy İntegral Formu

Teorem: f, basit kapalı ve pozitif yönlü kontur γ'nın içinde ve üzerinde analitik olsun. Eğer, z_0 γ'nın içinde herhangi bir nokta ise, o zaman

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z - z_0}$$

sağlanır.

Bu formül Cauchy integral formülü olarak adlandırılır. Kısaca, eğer f fonksiyonu γ basit kapalı konturunun içinde ve üzerinde analitik ise, f'in γ'nın içindeki değerleri, f'in γ üzerindeki değerleri ile tam olarak belirlenir. Cauchy integral formülü

$$\int_\gamma \frac{f(z)dz}{z-z_0} = 2\pi i f(z_0)$$

olarak yazılırsa, basit kapalı konturlar boyunca integrallerin hesaplanmasında kullanılabilir.

NOT: Eğer z_0 konturun dışında ise $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)dz}{z-z_0} = 0$'dır.

Örnek: $z_0 = 1$ noktasını içine alan kapalı bir eğri üzerinde

$$\int_\gamma \frac{z^2+1}{z-1}dz$$

integralini hesaplayınız.

Cauchy integral formülü; $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)dz}{z-z_0}$

$$z_0 = 1, \qquad f(z) = z^2+1 \;\Rightarrow\; f(1) = 1^2+1 = 2$$

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-1}dz = \int_\gamma \frac{z^2+1}{z-1}dz = 2\pi i f(1) = 4\pi i$$

Problemler:

1. γ pozitif yönlü, $|z| = 1$ birim çemberi üzerinde $\oint_\gamma \frac{\cos z}{z}\,dz$ integralini hesaplayınız.

2. γ pozitif yönlü, $x = \pm 2$ ve $y = \pm 2$ çizgileri (doğruları) boyunca uzanan kenarlara sahip karenin sınırı olsun.

a) $\oint_\gamma \frac{\cos z}{z(z^2+8)}\,dz$ integralini hesaplayınız.

b) $\oint_{\gamma} \frac{\exp(-z)}{z-(\pi i/2)}\, dz$ integralini hesaplayınız.

Kaynaklar

1. J.W. Brown and R.V. Churchill, Complex Variables and Applications, Eighth Edition, McGraw-Hill, Boston, 2009.

2. K.T. Tang, Mathematical Methods for Engineers and Scientists 1, Springer-Verlag, Berlin, 2007.

3. D.G. Zill, P.D. Shanahan, Kompleks Analiz ve Uygulamaları, Nobel, Ankara, 2020.