4. BÖLÜM: SERİLER

4.1. Dizilerin Yakınsaklığı

Kompleks sayıların sonsuz bir dizisi

$$z_1, z_2, \dots, z_n$$

z limitine sahiptir eğer, her pozitif ε sayısı için,

$$|z_n - z| < \varepsilon \quad (n > n_0 \text{ olduğunda})$$

eşitsizliğini sağlayan bir n_0 tamsayısı varsa.

Geometrik olarak, n'nin yeterince büyük değerleri için, z_n noktaları z'nin verilen herhangi bir ε komşuluğu içindedir. z_n noktaları, ε çok küçük seçildiğinden alt indisleri arttığında z'ye keyfi olarak daha da yaklaşırlar. n_0'ın değeri ε değerine bağlı olmalıdır.

Bu dizi en azından bir limite sahip olabilir. Yani, eğer limit var ise z'nin limiti tektir. Bu limit var olduğunda, dizi z'ye yakınsar denir ve

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z$$

olarak yazılır. Eğer dizinin limiti yok ise dizi ıraksar.

Teorem: $z_n = x_n + iy_n,\ n = 1,2,3,\dots$ ve $z = x + iy$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z$$

limiti vardır ancak ve ancak

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

limitleri varsa (mevcut ise).

4.2. Serilerin Yakınsaklığı

Kompleks sayıların sonsuz serisini ele alalım:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$$

Bu seri S'ye yakınsar, eğer dizinin kısmi toplamları

$$S_n = \sum_{n=1}^{N} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_N, \qquad N = 1,2,\ldots$$

S'ye yakınsıyor ise. Böylece,

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$$

olarak yazılır.

Dizi en azından bir limite sahip olabileceğinden, seri en azından bir toplama sahiptir. Eğer seri yakınsamaz ise, ıraksaktır denir.

Teorem: $z_n = x_n + iy_n,\ n = 1,2,3,\ldots$ ve $S = X + iY$ olsun.

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$$

vardır ancak ve ancak

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = X \quad \text{ve} \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n = Y$$

ise.

Bu teoremden,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n + iy_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i\sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

yazılabilir, ancak sağdaki seriler ya da soldaki yakınsak ise.

4.3. Taylor Serisi

Taylor teoremine tekrar geri dönüyoruz. Bu teorem bu bölümün en önemli sonuçlarındandır.

Teorem: Merkezi z_0'da bulunan, R_0 yarıçaplı, $|z - z_0| < R_0$ diskinde analitik olan bir f fonksiyonu olsun. $f(z)$, kuvvet serisi olarak ifade edilebilir:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R_0$$

Burada, a_n katsayıları

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0,1,2, \ldots$$

olarak tanımlıdır. Yani, z açık disk içindeyse, bu seri $f(z)$'ye yakınsar.

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (z - z_0)^n$ bu da $f(z)$'nin z_0 noktası yakınında Taylor serisine açılımıdır. Bu reel sayılardan çok iyi bilinen Taylor serisinin, kompleks sayılara uyarlamasıdır. Burada,

$$f^{(0)}(z_0) = f(z_0) \ \text{ ve } \ 0! = 1$$

olmak üzere, seri açıkça aşağıdaki gibi yazılır:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{1!}(z - z_0)^2 + \cdots, \quad |z - z_0| < R_0$$

z_0 noktasında analitik olan her fonksiyon, z_0 yakınında serisine sahip olmalıdır.

Eğer f'in z_0 merkezli çemberin içinde her yerde analitik olduğu biliniyorsa, bu çemberin içindeki her bir z noktası için, $f(z)$'nin z_0 yakınındaki Taylor serisi yakınsaktır. $z_0 = 0$ olduğunda, $f(z)$ fonksiyonunun $|z| < R_0$ diski içinde analitik olduğu varsayılır ve bu durumda seri Maclaurin serisi olarak adlandırılır:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, z^n, \quad |z| < R_0$$

Örnek 1: $f(z) = e^z$ fonksiyonu tam olduğundan, tüm z'ler için geçerli Maclaurin seri gösterimine sahiptir. Burada, $f^{(n)}(z) = e^z,\ n = 0,1,2, \ldots$ ve $f^{(n)}(0) = 1,\ z_0 = 0$ olduğundan

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\, (z - z_0)^n \ \Rightarrow\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, z^n$$

$$\Rightarrow \quad e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < \infty$$

Eğer, $z = x + i\,0$ ise,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (-\infty < x < \infty)$$

olarak yazılır.

4.4. Laurent Serileri

Eğer bir f fonksiyonu, z_0 noktasında analitik olmuyorsa, bu noktada Taylor teoremi uygulanmaz. Bununla birlikte, $f(z)$ için $(z - z_0)$'ın pozitif ve negatif kuvvetlerini içerecek şekilde bir seri temsili bulunabilir. Şimdi böyle temsillerin teorisi verilecek. Bunun için Laurent teoremi ile başlayalım.

Teorem: f fonksiyonu, z_0 merkezli $R_1 < |z - z_0| < R_2$ bölgesinde analitik ve C^1 de z_0 etrafında pozitif yönelimli basit kapalı bir kontur olsun. Bu bölgenin her bir noktasında, $f(z)$ seri temsiline sahiptir:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

Burada,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{-n+1}},$$

olarak verilirler.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$ seri açılımında $n \to -n$ değişikliği yapalım:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{b_{-n}}{(z - z_0)^{-n}}$$

Burada,

$$b_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad n = -1,-2,\ldots$$

ile verilir. Böylece,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} b_{-n}(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

olarak yazılır. Eğer,

$$c_n = \begin{cases} b_{-n} & n \leq -1 \\ a_n & n \geq 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa, $f(z)$ aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad R_1 < |z-z_0| < R_2$$

Burada,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ile verilir.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

ve

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

Laurent serisi olarak adlandırılır.

Örnek 1:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

Maclaurin seri açılımında z yerine $1/z$ yazalım:

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n n!} = 1 + \frac{1}{1!\,z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \cdots, \quad 0 < |z| < \infty$$

Burada, pozitif kuvvet yok, pozitif kuvvetli terimlerin katsayıları sıfırdır. $1/z$'nin katsayısı birdir ve Laurent teoremine göre bu katsayı aşağıdaki integral alınarak bulunur:

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{1/z}\,dz$$

Burada, C pozitif yönlü, orijin etrafında basit kapalı bir konturdur. $b_1 = 1$ olduğundan

$$1 = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{1/z}\,dz \quad \Rightarrow \quad 2\pi i = \int_C e^{1/z}\,dz$$

integrali bulunur. Bu örnekten de görüldüğü gibi bu yöntem ile, basit kapalı konturlar çevresinde bazı integraller bulunabilir.

Kaynaklar

1. J.W. Brown and R.V. Churchill, Complex Variables and Applications, Eighth Edition, McGraw-Hill, Boston, 2009.

2. K.T. Tang, Mathematical Methods for Engineers and Scientists 1, Springer-Verlag, Berlin, 2007.

3. D.G. Zill, P.D. Shanahan, Kompleks Analiz ve Uygulamaları, Nobel, Ankara, 2020.