4. BÖLÜM: SERİLER

4.5. İzole Tekillikler ve Sınıflandırılmaları

Cauchy Goursat teoremine göre, eğer $f(z)$ fonksiyonu basit kapalı C konturu üzerinde ve içinde analitik ise, bu kontur üzerinden $f(z)$ fonksiyonunun integrali sıfırdır. Eğer, $f(z)$ fonksiyonu basit kapalı C konturu içinde sonlu sayıdaki bazı noktalarda analitik değil ise, rezidü olarak adlandırılan belirli bir sayı vardır ki her bir noktadan gelen bu sayılar integralin değerine katkıda bulunur. Bu kesimde fonksiyonun analitik olmadığı bu noktaları sınıflandıracağız.

Tanım: $f(z)$ analitik bir fonksiyon olsun ve z_0 da kompleks düzlemde bir nokta. z_0 noktası izole tekil bir noktadır, eğer $f(z)$ fonksiyonu z_0 hariç z_0'ın çevresinde analitik ise.

$f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında bir izole tekil noktaya sahip olsun, $f(z)$ Laurent serisine sahiptir:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$, z_0'da $f(z)$'nin temel kısmı olarak adlandırılır. Serinin temel kısmını kullanarak izole tekil nokta z_0'ı sınıflandıralım. Üç özel tip izole tekil nokta vardır:

Kaldırılabilir, basit kutup ve esas (esencial) tekil nokta.

a) Eğer $\forall n \in \mathbb{N}$ için $b_n = 0$ ise, z_0 f'in kaldırılabilir tekil noktasıdır.

b) Eğer $b_m \neq 0$ ve $b_n = 0 \ \forall \ n > m$ ise, z_0 f'in m. dereceden kutbudur (kutup noktasıdır). Eğer $m = 1$ ise z_0 basit kutup noktası olarak adlandırılır.

c) Eğer $b_n \neq 0$ katsayılarının sayısı sonsuz ise, z_0 f'in esas tekil noktasıdır.

Tanım: Bir izole tekil nokta olan z_0'da f'in rezidüsü, z_0 etrafındaki Laurent seri açılımının ilk katsayısı b_1'in değeridir:

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = b_1 \quad \text{ya da} \quad b_1 = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$$

Bu katsayı daha önce tanımlandığı gibi hesaplanır:

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz$$

C, z_0 merkezli bir çemberdir ve serinin yakınsama bölgesini içerir. Böylece,

$$2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \int_C f(z)dz$$

eşitliği elde edilir. Bu da basit kapalı konturlar üzerinden belli integralleri hesaplamada güçlü bir yöntemdir.

Örnek: $\int_C \operatorname{Exp}(\frac{1}{z^2})\, dz = 0$ eşitliğinin sağlandığını gösteriniz.

C bir önceki örnekteki gibi, pozitif yönlü $|z| = 1$, birim çemberi olsun. $\frac{1}{z^2}$, $z = 0$ hariç her yerde analitiktir. İzole tekil nokta $z = 0$, çemberin içindedir.

e^z'nin Maclaurin seri temsini göz önüne alalım:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots, \qquad |z| < \infty$$

Laurent seri temsili

$$e^{1/z^2} = 1 + \frac{1}{1!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^4} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^6} + \cdots, \quad 0 < |z| < \infty$$

İntegrantın rezidüsü sıfırdır ($b_1 = 0$), böylece integralin sağlandığı görülür.

Teorem: C pozitif yönlü, basit kapalı bir kontur olsun. Eğer $f(z)$ fonksiyonu C'nin içinde ve üzerinde sonlu sayıda z_k tekil noktası dışında analitik ise

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

vardır. C_k çemberleri pozitif yönlü, z_k merkezli, C'nin içine yer alan ve ortak noktaları olmayan çemberlerdir. C_k çemberleri, basit kapalı kontur C ile birlikte, f'in analitik olduğu kapalı bölgenin sınırlarını oluştururlar ve C_k'nın dışında ve C'nin içindeki noktaların oluşturduğu çoklu bağlantılı bölgedir. Böylece Cauchy Goursat teoremi bu bölgelere uygulanırsa:

$$\int_C f(z)dz - \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)dz = 0$$

elde edilir. Buradan,

$$\int_{C_k} f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)\,, \quad k = 1,2,\ldots$$

Örnek: $\int_{C_k} \frac{5z-2}{z(z-1)} dz$ integralini yukarıdaki teoremi kullanarak hesaplayınız. Burada, C pozitif yönlü, $|z| = 2$ yarıçaplı çemberdir. İntegrant iki tane izole tekil noktaya sahiptir: $z = 0,\ z = 1$. Her iki izole tekil nokta da C'nin içindedir. Maclaurin serisinin yardımıyla, $z = 0$'daki rezidü B_1 ve $z = 1$'deki rezidü B_2 bulunabilir.

$$\frac{1}{(z-1)} = 1 + z + z^2 + \cdots, \quad |z| < 1$$

$$\frac{5z-2}{z(z-1)} = \frac{5z-2}{z}\frac{(-1)}{1-z} = (5 - \frac{2}{z})(-1 - z - z^2 - \cdots)$$

Buradan, $\frac{1}{z}$'nin katsayısının 2 olduğu hemen görülür. Yani, $B_1 = 2$'dir.

$$\frac{5z-2}{z(z-1)} = \frac{5(z-1)+3}{z-1}\frac{1}{1+(z-1)}$$

$$= (5 + \frac{3}{z-1})(1 - (z-1) + (z-1)^2 + \cdots)$$

Buradan, $\frac{1}{z-1}$'nin katsayısı 3 olarak bulunur. Yani, $B_2 = 3$'dür. Sonuç olarak integral,

$$\int_{C_k} \frac{5z-2}{z(z-1)} dz = 2\pi i\,(B_1 + B_2) = 10\pi i$$

Teorem: $f(z)$ analitik fonksiyonunun z_0 izole tekil noktası k. dereceden bir kutuptur, ancak ve ancak

$$\lim_{z\to z_0} (z - z_0)^k f(z)$$

mevcut ve sıfırdan farklı ise.

Örnek: $\frac{z^2-2z+3}{z-2} = \frac{z(z-2)+3}{z-2} = z + \frac{3}{z-2} = 2 + (z-2) + \frac{3}{z-2}$, $(0 < |z-2| < \infty)$

$z_0 = 2$'de $(m = 1)$ basit kutuba sahiptir. Bu durumda rezidü $b_1 = 3$'dür.

4.6. Kutuplardaki Rezidüler

Teorem: $f(z)$ fonksiyonunun, izole tekil noktası m. dereceden bir kutuptur, ancak ve ancak $f(z)$ aşağıdaki gibi yazılabiliyorsa:

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m}$$

Burada, $\phi(z)$ analitiktir ve z_0'da sıfırdan farklıdır. Dahası,

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \phi(z_0) \quad \text{eğer } m = 1$$

ve

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\phi^{m-1}(z_0)}{(m-1)!} \quad \text{eğer } m \geq 2$$

olarak tanımlanır. $m = 1$ olan eşitlik, $m = 2$ olandan $m = 1$ için elde edilir. $(\phi^{(0)}(z_0) = \phi(z_0)$ ve $0!=1)$

Örnek: $f(z) = \frac{z+1}{z^2+9}$ fonksiyonunu ele alalım. $z = 3i$'de izole tekil noktaya sahiptir ve

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{z-3i}$$

Burada, $\phi(z) = \frac{z+1}{z+3i}$ ile verilir. $\phi(z)$ $z = 3i$'de analitiktir ve $\phi(3i) \neq 0$'dır. $z = 3i$ noktası $f(z)$'nin basit kutbudur ve bu noktada rezidü

$$B_1 = \phi(3i) = \frac{3i+1}{6i}\,\frac{-i}{-i} = \frac{3-i}{6}$$

$z = -3i$'de $f(z)$'nin basit kutbudur ve bu durumda rezidü

$$B_2 = f(-3i) = \frac{3+i}{6}$$

4.7. Analitik Fonksiyonların Sıfırları

Bir fonksiyonun kutupları ve sıfırları birbirleriyle yakından ilişkilidir.

Teorem: $f(z)$, z_0'da analitik fonksiyon olsun. f z_0'da m. dereceden sıfıra sahiptir, ancak ve ancak z_0'da sıfırdan farklı bir $g(z)$ fonksiyonu var ise:

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

Örnek: $f(z) = z^3 - 8 = (z-2)(z^2 + 2z + 4)$ polinomunu ele alalım. $z_0 = 2$'de $m = 1$. dereceden sıfıra sahiptir:

$$f(z) = (z-2)g(z)$$

Burada $g(z) = (z^2 + 2z + 4)$'tür ve f ve g fonksiyonları tamdır. $g(2) = 12 \neq 0$'dır.

$z_0 = 2$, f'in $m = 1$. dereceden sıfırıdır, f tamdır ve $f(2) = 0$ ve $f'(2) = 12 \neq 0$'dır.

Teorem: p ve q fonksiyonları z_0 noktasında analitik olsun. Eğer, $p(z_0) \neq 0$, $q(z_0) = 0$ ve $q'(z_0) \neq 0$ ise, z_0 $p(z)/q(z)$ oranının basit kutup noktasıdır ve rezidü aşağıdaki gibi bulunur:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Kaynaklar

1. J.W. Brown and R.V. Churchill, Complex Variables and Applications, Eighth Edition, McGraw-Hill, Boston, 2009.

2. K.T. Tang, Mathematical Methods for Engineers and Scientists 1, Springer-Verlag, Berlin, 2007.

3. D.G. Zill, P.D. Shanahan, Kompleks Analiz ve Uygulamaları, Nobel, Ankara, 2020.