5. BÖLÜM: REZİDÜLERİN UYGULAMALARI

Bu bölümde rezidü teorisinin bazı önemli uygulamaları ele alınacak. Reel analizdeki belirli tipteki has olmayan (improper) integraller de bunların içindedir. Sınırlarında sonsuz içeren ya da sınırlarında tanımsızlığa neden olan sınır içeren integraller has olmayan (genelleştirilmiş) integraller olarak adlandırılırlar.

5.1. Has Olmayan İntegrallerin Hesabı

$f(x)$ reel fonksiyonunun has olmayan integrali, yarı sonsuz aralık üzerinde tanımlanır:

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R f(x)\,dx$$

Sağdaki limit var olduğunda, bu integral bu limite yakınsar denir. Eğer, $f(x)$ tüm x'ler için sürekli ise, onun has olmayan integrali sonsuz aralık üzerinden tanımlanır (Eğer x ekseninde tekillik var ise bu integral bu ifade biraz daha farklıdır):

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{R_1\to\infty}\int_{-R_1}^0 f(x)\,dx + \lim_{R_2\to\infty}\int_0^{R_2} f(x)\,dx$$

Her iki limit de var ise, integral bu limitlerin toplamına yakınsar. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ integralini bulmanın bir yolu da Cauchy prensip değerini bulmaktır:

$$P.V.\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R f(x)\,dx$$

Burada,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}[\int_{-R}^0 f(x)\,dx + \int_0^R f(x)\,dx]$$

$$= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^0 f(x)\,dx + \lim_{R\to\infty}\int_0^R f(x)\,dx$$

olarak tanımlıdır.

Örnek:

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} x\,dx = \lim_{R\to\infty}\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-R}^{R} = \lim_{R\to\infty} 0 = 0$$

Diğer taraftan,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx = \lim_{R_1\to\infty}\int_{-R_1}^{0} x\,dx + \lim_{R_2\to\infty}\int_{0}^{R_2} x\,dx$$

$$= \lim_{R_1\to\infty}\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-R_1}^{0} + \lim_{R_2\to\infty}\frac{x^2}{2}\Bigg|_{0}^{R_2}$$

$$= -\lim_{R_1\to\infty}\frac{{R_1}^2}{2} + \lim_{R_2\to\infty}\frac{{R_2}^2}{2}$$

Bu iki limit var olmadığından, has olmayan integral de yoktur.

$f(x)$ fonksiyonu $(-\infty < x < \infty)$ tüm x'ler için çift fonksiyon olsun:

$$f(-x) = f(x)$$

ve Cauchy prensip değeri var olsun. Bu durumda,

$$\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}[P.V.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\,]$$

eşitliği vardır.

Şimdi rezidülerin toplamını içeren metodu tanımlayalım. Bu metot sıklıkla $f(x) = p(x)/q(x)$ şeklindeki rasyonel fonksiyonların has olmayan integrallerini hesaplamada kullanılır. Burada, $p(x)$ ve $q(x)$ reel katsayılı polinomlardır ve ortak çarpana sahip değildirler. $q(z)$ reel sıfırlara sahip değildir, fakat en azından bir tane reel eksen üzerinde sıfırı vardır.

1) İlk adım olarak, polinom olan $q(z)$'nin reel eksenin üzerinde kalan birbirinden farklı sıfırları belirlenir. Bunlar sonlu sayıdadır ve $z_1, z_2, \dots, z_n$ olarak etiketlendirilebilirler. Burada, n $q(z)$'nin derecesine eşit ya da küçüktür.

2) Daha sonra

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

oranının pozitif yönlü yarı çember üzerinden integrali alınır. Basit kapalı kontur iki parçadan oluşur:

i) $-R$'den R'ye reel eksen üzerindeki parça (segment)

ii) $|z| = R$ yarıçaplı çemberin üst tarafı. Saat ibrelerinin tersi yönde yönlendirilmiştir (pozitif yönlü) ve C_R ile gösterilir.

R pozitif sayısı, $z_1, z_2, \dots, z_n$ noktaları kapalı eğrinin içinde kalacak şekilde yeterince büyük bir sayıdır. Reel eksenin yukarıda sözü edilen parçasının parametrik temsili $z = x\ (-R \le x \le R)$ ve Cauchy rezidü teoremi kullanılırsa integral aşağıdaki gibi bulunur:

$$\int_{-R}^{R} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) - \int_{C_R} f(z)\, dz$$

Eğer,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\, dz = 0$$

ise,

$$P.V. \int_{-R}^{R} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

olur.

Problemler:

1. $I = \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\, dx$ has olmayan integralini rezidüleri kullanarak hesaplayınız.

Kaynaklar

1. J.W. Brown and R.V. Churchill, Complex Variables and Applications, Eighth Edition, McGraw-Hill, Boston, 2009.

2. K.T. Tang, Mathematical Methods for Engineers and Scientists 1, Springer-Verlag, Berlin, 2007.

3. D.G. Zill, P.D. Shanahan, Kompleks Analiz ve Uygulamaları, Nobel, Ankara, 2020.